

定常流内における定常拡散の数値解

矢野雄幸

NUMERICAL COMPUTATION OF A STEADY DIFFUSION PROBLEM

Yukō Yano

Received 31 August 1967

Abstract

The equation of two-dimensional steady diffusion may be written

$$\frac{\partial(uR)}{\partial x} + \frac{\partial(vR)}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right)$$

Rewriting the above equation in a finite difference form, the numerical solution is obtained by an iterative method. The variables, u and v , are the component velocities which are determined by an iterative method using a finite difference form from the equations of two-dimensional steady flow. This computation is made for the rectangular basin which is open at one end and has two sources at the other, from one of which pigment solution of constant concentration is flowing out.

1 ま え が き

尾鷲港における火力発電所の冷却水放出による温水拡散調査の際、染料流しを実施したことに関連し染料の定常拡散の数値解を試みたので参考までに報告する。尾鷲港には冷却水の放水口の北約1,000 m付近に大きな川があるので長方形の湾奥に2箇の流源があり、その一つからある染料が一定濃度で出る場合の2次元定常拡散

$$\frac{\partial(uR)}{\partial x} + \frac{\partial(vR)}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(1)$$

κ : 拡散係数

の数値解を求めた。湾の規模や流源の位置、流速は Fig.1 のとおりである。

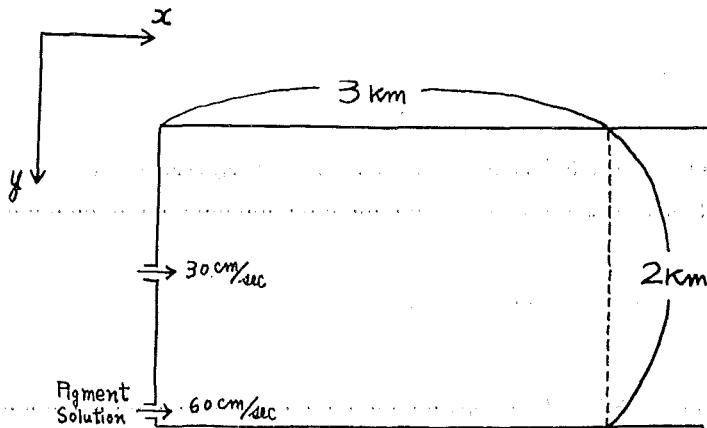


Fig. 1 The dimension of the basin and the position of sources

2 湾内の定常流の決定

2次元定常の運動方程式，連続式はそれぞれ

$$A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad A: \text{渦動粘性係数}$$

であるから，流れ関数 F を用いると $u = \partial F / \partial y, v = -\partial F / \partial x$ で

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

なる重調和関数を得る。

この(2)式を定差式

$$\begin{aligned} F_{i,j} = & 0.40 (F_{i+1,j} + F_{i-1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1}) \\ & - 0.10 (F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} + F_{i+1,j-1} + F_{i-1,j-1}) \\ & - 0.05 (F_{i+2,j} + F_{i-2,j} + F_{i,j+2} + F_{i,j-2}) \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

に置換して，電子計算機 HIPAC 103 で反復計算し F を決定した。しかし開口部の境界条件がないので湾の長さを2倍の6kmとし，その開口部では x 方向のみの流れになる。すなわち $v = -\partial F / \partial x = 0$ と仮定して格子間隔200mで F を計算した。また岸線における境界条件は岸線の接線方向の流れは岸線の垂直方向に変化しない，すなわち $\partial u / \partial y = 0$ ($\partial^2 F / \partial y^2 = 0$)，又は $\partial v / \partial x = 0$ ($\partial^2 F / \partial x^2 = 0$) と仮定した。なお境界値は岸線上では垂直方向の流れがないことを考慮して Fig. 2 のようにし，内部の初期値は境界値を一次補間で配分した。

Fig. 3a は代表点3箇所の F の値であるが，これで見ると F の値は1000回程度でほとんど収束しているが流速 u, v は F の絶対値で決定されるものでなく隣接点との差で決まるものであるから500回とでは流速に大差はない(絶対値で2cm/sec以下)。

この計算では1063回の反復を行ない，開口部側の半分を捨てて6kmを3kmとし200m間隔で求めた F を用い100m間隔点を補間して格子間隔100mで流速を決定した。それが Fig. 4 であり単位は cm/sec である(流源沖800m以上では記入を省略し200m間隔点のみ記入した)。なお(3)式の計算所要時間はHIPAC 103で約4時間であった。

3 濃度分布の決定

(1) 式を定差式にすると (i, j) における値 $R'_{i,j}$ は

$$\begin{aligned} R'_{i,j} = & A_1 (R_{i+1,j} + R_{i-1,j} + R_{i,j+1} + R_{i,j-1}) + A_0 (u_{i-1,j} R_{i-1,j} - u_{i+1,j} R_{i+1,j} \\ & + v_{i,j-1} R_{i,j-1} - v_{i,j+1} R_{i,j+1}) \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

とかける。ただし拡散係数 κ は $20m^2/sec$ とし，格子間隔を100mとすると(4)式の A_0, A_1 は，

$$A_0 = \Delta \ell / 8\kappa = 0.625, \quad A_1 = 1/4 \text{ である。}$$

なお収束を早めるために1/4の加速定数を用い(4)式の計算のあと，

$$R_{i,j}^{n+1} = R'_{i,j} + \frac{1}{4} (R'_{i,j} - R_{i,j}^n) \dots\dots\dots(5)$$

を行なって $R_{i,j}^n$ を $R_{i,j}^{n+1}$ に置換した (n は反復回数)。 $R_{i,j}$ の数値としては染料の出る流源でその濃度は常に100(%)とし，他の流源では1(%)とした。開口部の境界条件は濃度の減衰率が一定，すなわち $\partial^2 R / \partial x^2 = 0$

と仮定し、岸線では岸線の垂直方向には変化しない、すなわち $\partial R/\partial x=0$ または $\partial R/\partial y=0$ とした。また岸線に垂直な流れがないことをあわせて $\partial(uR)/\partial x=0$ または $\partial(vR)/\partial y=0$ も用いた。

計算は流源を除いて零から始め Fig.3b のように約250回でほとんど収束する。その結果 Fig.5 を得た。計算所要時間は約1時間であった。

4 む す び

尾鷲湾は全く長方形ではないし、潮汐現象がありまた放水口の河口に島があることから Fig.5 は実際の観測濃度分布とは一致しないが大勢としては Fig.6 の落潮時の状態に似ている。計算値のほうが濃度が高くなった主要原因としては海岸における染料の吸着を考慮しなかったことが考えられる。実際その後の調査でも染料のかんりの吸着が認められるから今後の計算ではこれを考慮に入れる必要がある。また Fig.5 の染料源前面の所に濃度の低い凹みがあるがこれは R'_{ij} の計算上発生したもので原因としては粗い間隔で u , v を決定して、その中間点を補間して求めた u , v が変化のはげしい所では適当でなかったことが考えられ、今後流速決定点は濃度決定点より細かくして u , v の値を決定する必要がある。(3)式の計算についても想像以上の時間を要し加速定数を用いる等収束をはやめる工夫が必要である。

おわりにいろいろ教示をいただいた海洋資料センター彦坂繁雄氏に厚くお礼を申し上げます。

(海象課)

参 考 文 献

正野重方 1963, 緩和法入門, 朝倉書店

和田 明 1966, “冷却水放水にともなう流動と熱拡散現象について”, 電力中央研究所技術研究所
報告 No.66033

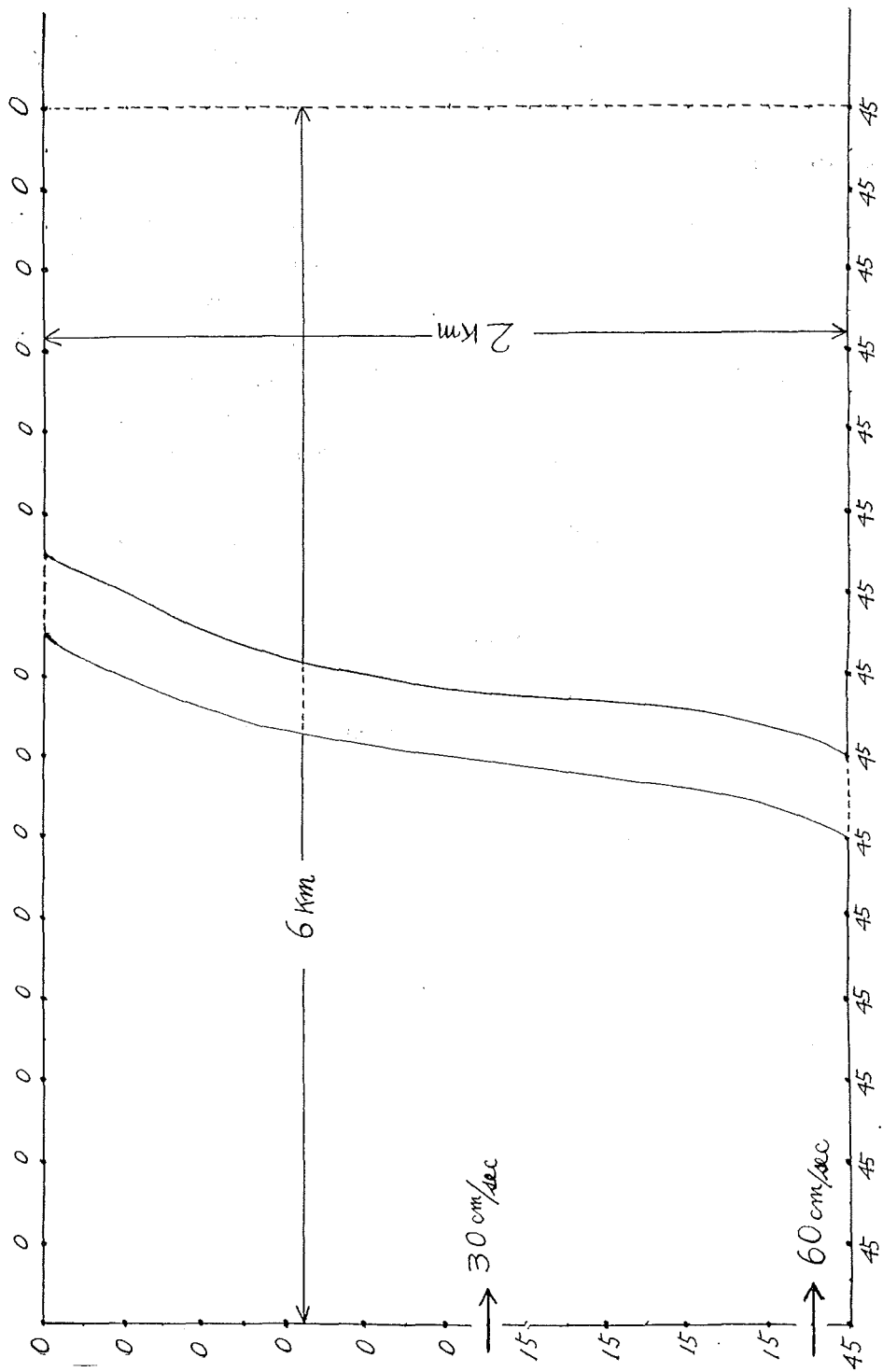


Fig. 2 Boundary values of F

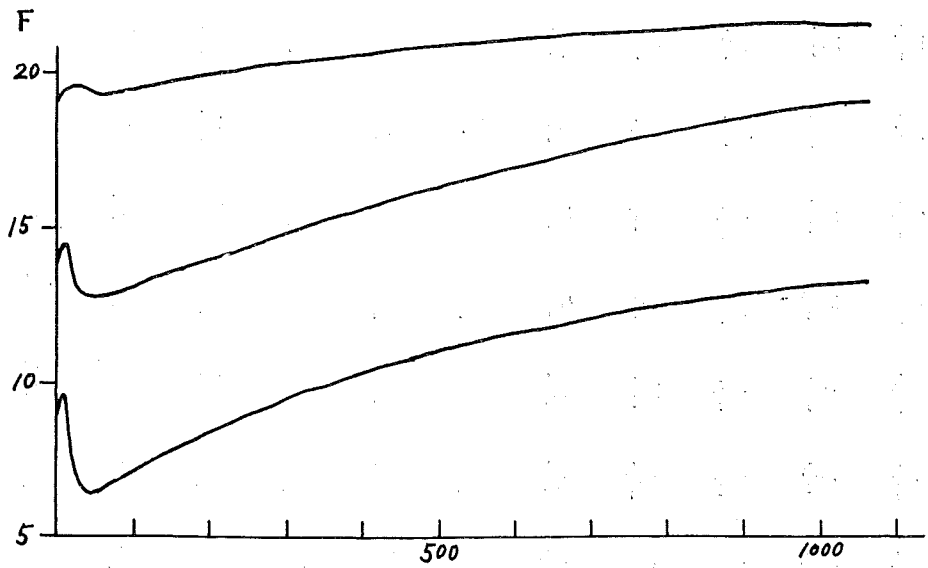


Fig. 3a Convergence of F

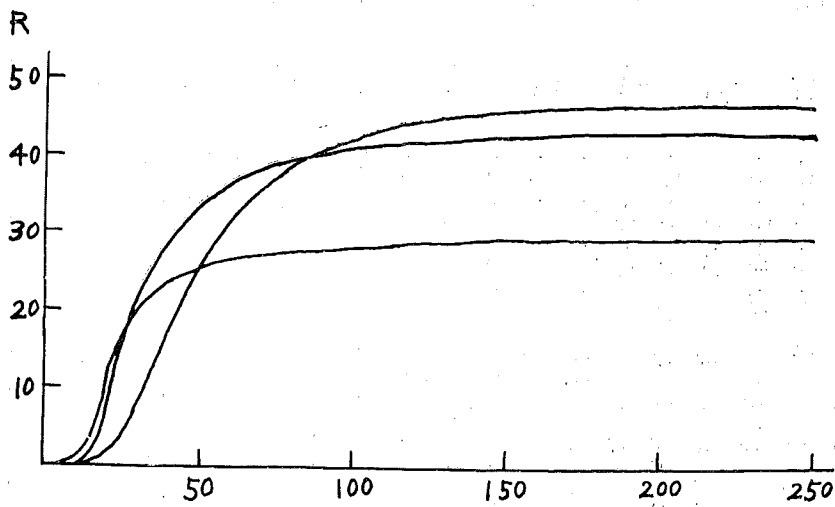


Fig. 3b Convergence of R

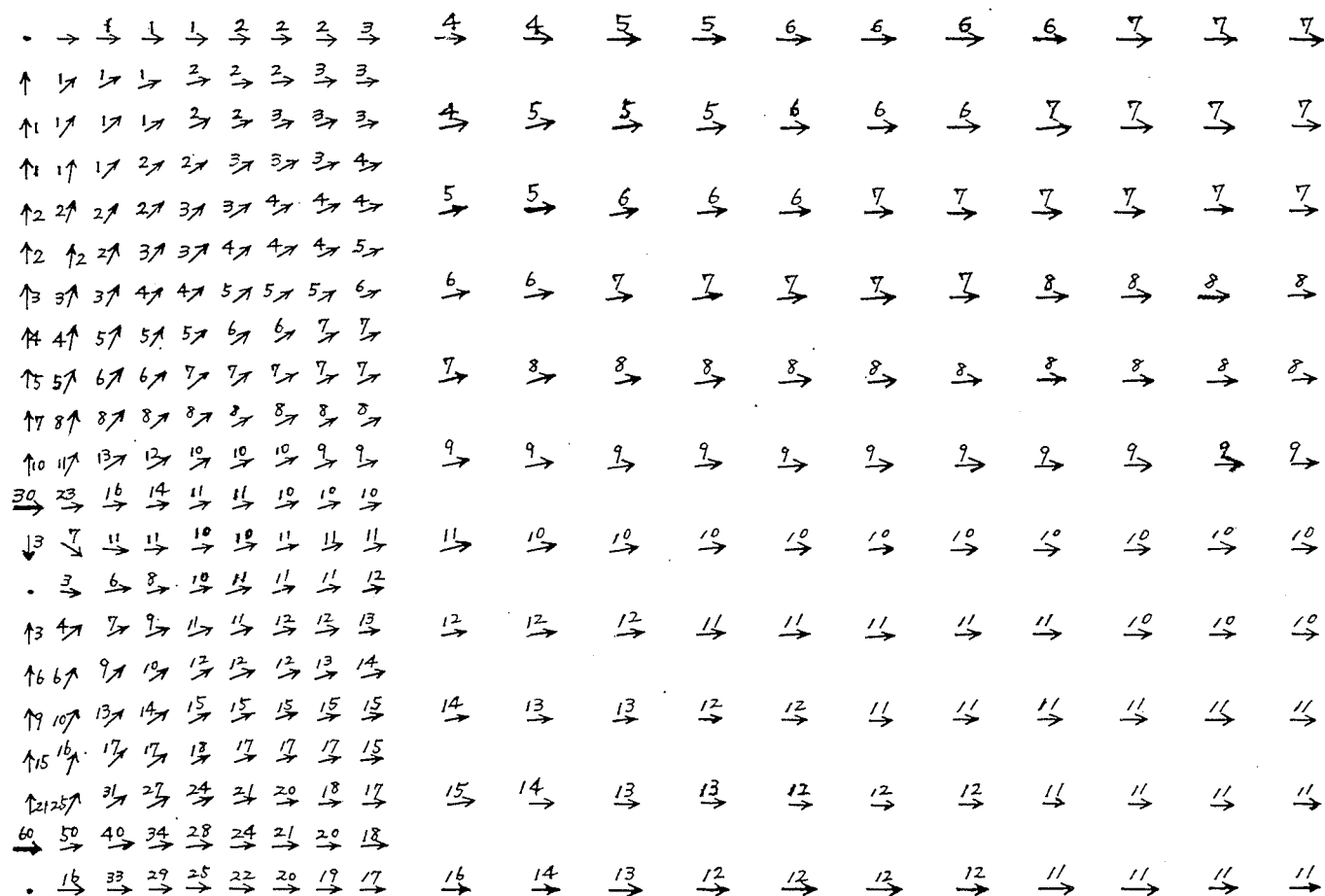


Fig. 4 Computed steady currents.

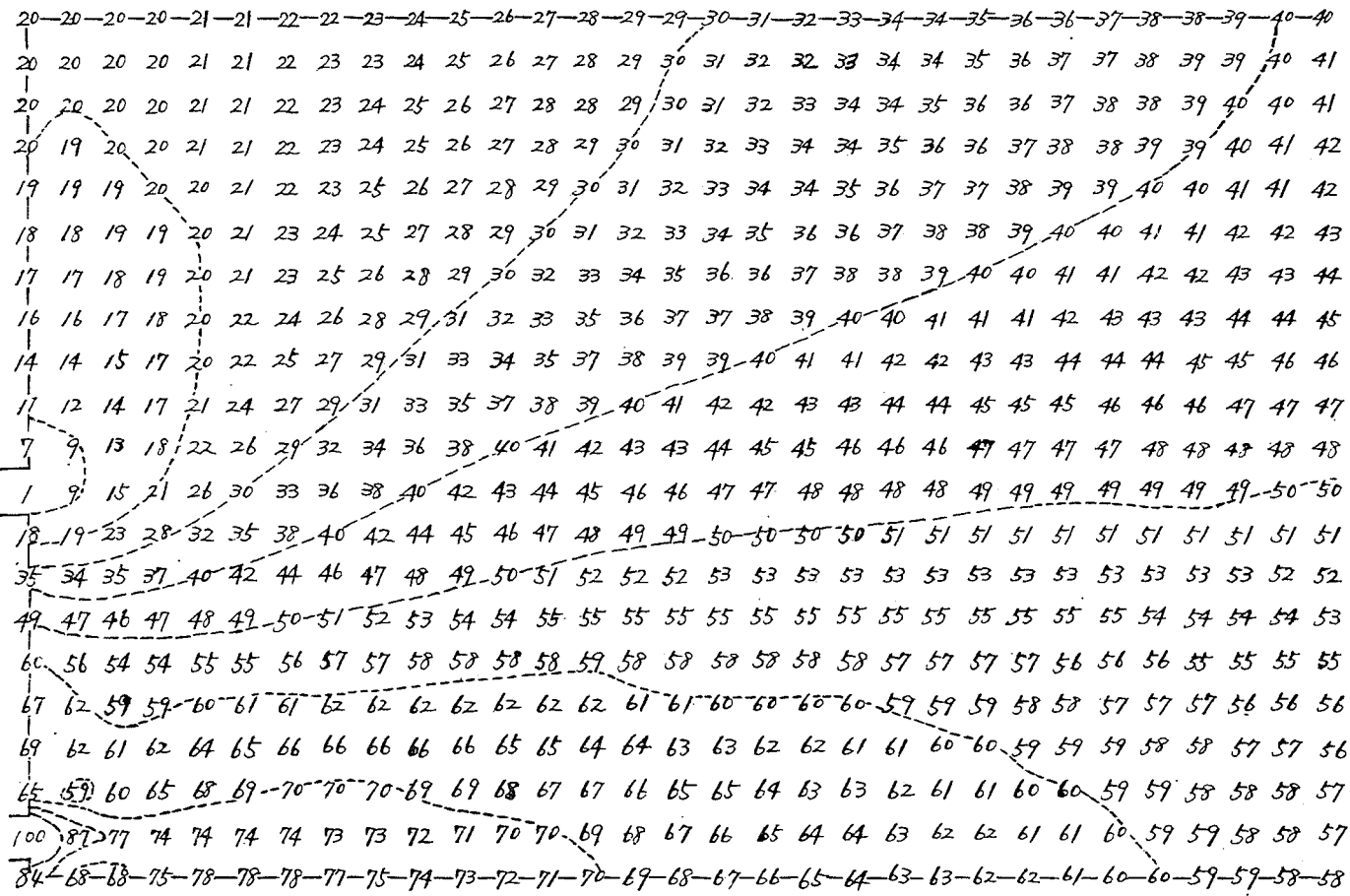


Fig. 5 Computed values of concentration

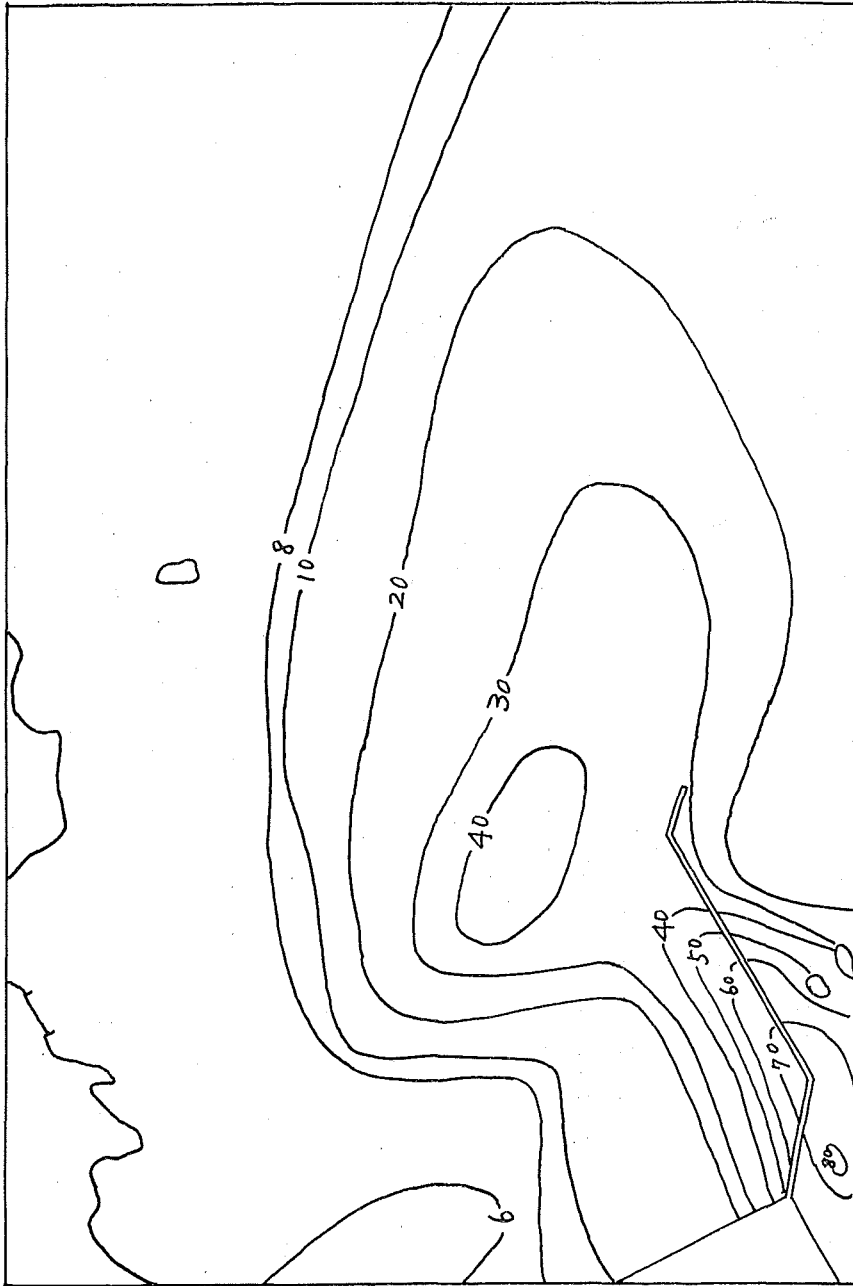


Fig. 6 Observed concentration