

短周期摂動の二次元性 (一次の理論, 円運動の場合)

仙石 新*

THE TWO DIMENSIONAL SHORT PERIODIC PERTURBATIONS ON THE CIRCULAR ARTIFICIAL SATELLITES

Arata Sengoku*

Abstract

In the artificial satellite motion, it has been found that most kinds of short periodic perturbations are restricted within the orbital plane when the eccentricity is sufficiently small.

First, the perpendicular component of the equation of motion is solved for the two types of perturbing forces, the one is a sine-curve-type force with the orbital period, the other is a constant force. If the reference plane is properly chosen, the solution is the order of the eccentricity compared with the perturbation in the plane. Then, the physical meanings are discussed.

Finally, it is shown that the main parts of well-known perturbation forces correspond to either of these (the geopotential, the third-body attraction and the Earth's tide are the former; the radiation pressure is the latter).

1. はじめに

人工衛星に加わる摂動には、地球の偏平度、月・太陽の重力、太陽の輻射圧、潮汐など実に様々な要因があり、その結果もバラエティに富んでいて、一般にケプラー要素の摂動の形で与えられる。

しかし、このままでは煩雑で各摂動間の類似点や現象の物理的本質が見えにくい。

ここでは座標の摂動の手法を用いて、2つのタイプの摂動力を考える。1つは公転周期と等しい周期の三角関数的な摂動力、もう1つは一定の摂動力である。このとき、人工衛星が円運動に近いなら、短周期摂動は二次元でよく近似できることを示し、その物理的意味あいを考察する。

さらに、多くの摂動力の主要項は上記のタイプに該当しており（地球の偏平度、月・太陽の重力、潮汐による摂動力は前者、太陽の輻射圧は後者にあたる）、したがって短周期摂動は二次元でよく近似できる。

Received 5 October 1984

* 航法測地課 Geodesy and Geophysics Division

また、軌道面の方向を決めるケプラー要素（昇交点経度と軌道傾斜角）の時間微分は、円運動の場合、座標の摂動の理論から定量的に求まる。

2. z の運動方程式

平均軌道要素で与えられる軌道面に垂直方向に z をとる。 z は微小量にとどまるので、

$$z = \delta z$$

と書き表わすことにする。

z の運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta z + \frac{\mu}{r^3} \delta z = \frac{\partial R}{\partial z} \dots\dots\dots (1)$$

($\mu=GM$, M : 地球の質量, r : 地心距離, G : 重力定数, R : 摂動関数, Figure 1 参照)

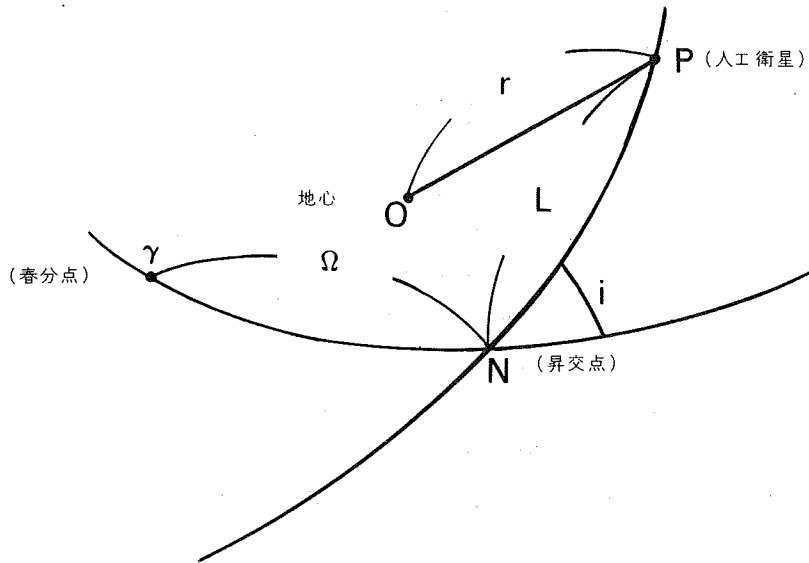


Figure 1

軌道が円に近い場合 ($r \sim a$: 長半径), 上式は近似的に、

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta z + n^2 \delta z = \frac{\partial R}{\partial z} \dots\dots\dots (2)$$

(n : 平均運動)

ここで人工衛星は平均軌道要素で与えられるケプラー運動をしていることにすると、右辺は時間の関数として与えられる。従って(2)は強制振動の方程式に帰着する。

3. z の共鳴

特に(2)の右辺が (1) $a \cos L + \beta \sin L$ ($L = f + \omega$: 緯度引数, α, β : 定数) (2) const. の2つの場合について考える。

(1) $\frac{\partial R}{\partial z} = a \cos L + \beta \sin L$ の場合

軌道が円に近いので $f \sim \ell = nt + \ell_0$.

$$\therefore \frac{\partial R}{\partial z} = a \cos L + \beta \sin L = a \cos(nt + \ell_0 + \omega) + \beta \sin(nt + \ell_0 + \omega)$$

したがって(2)式は共鳴の方程式になっている。その解は、

$$\begin{aligned} \delta z &= -\frac{\beta}{2n} t \cos(nt + \ell_0 + \omega) + \frac{\alpha}{2n} t \sin(nt + \ell_0 + \omega) + C_1 \cos(nt + \ell_0 + \omega) + C_2 \sin(nt + \ell_0 + \omega) \\ &= -\frac{\beta}{2n} t \cos L + \frac{\beta}{2n} t \sin L + C_1 \cos L + C_2 \sin L \quad (C_1, C_2 \text{は積分定数}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ところで (Brouwer and Clemence, 1961)

$$\delta z = r \sin L \delta i - r \sin i \cos L \delta \Omega \quad \dots\dots\dots (4)$$

上式において、

$$\begin{aligned} \delta i &= \dot{i} t + \delta i_0 \\ \delta \Omega &= \dot{\Omega} t + \delta \Omega_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

とおき、 $r = a$ とすれば直ちに、

$$\delta z = a \dot{i} t \sin L - a \dot{\Omega} t \sin i \cos L + a \delta i_0 \sin L - a \delta \Omega_0 \sin i \cos L \quad \dots\dots\dots (6)$$

(3), (6)を比較すると、

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{i} &= \frac{\alpha}{2na} \\ \dot{\Omega} &= \frac{\beta}{2na \sin i} \\ \delta i_0 &= \frac{C_2}{a} \\ \delta \Omega_0 &= -\frac{C_1}{a \sin i} \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (7)$$

これより微分方程式(2)の特殊解である共鳴項は i, Ω の永年摂動を意味し、一般解は i, Ω を定数分微小にズラせることと等価であることがわかる。

したがって、

$$\left(\begin{aligned} i &= i_0 + \dot{i} t + \delta i_0 \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega} t + \delta \Omega_0 \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (8)$$

($\dot{i}, \dot{\Omega}, \delta i_0, \delta \Omega_0$ は(7)式で与える。 i_0, Ω_0 は平均軌道要素)

によって軌道傾斜角と昇交点経度を与えると z の摂動を 0 にすることができる。すなわち、1 次の理論の範囲で円運動に近いならば ($O(e)$ を無視する近似で)、人工衛星の運動は二次元である、と考えて差支えない。摂動のうち軌道面内の成分に比して面に垂直方向の成分は e のオーダーになっている。

z 方向に力が加わったのにもかかわらず、平面運動しているのは、 z 方向の力が軌道面を回転させるトルクのみを与えたためである。(Figure 2, 3 参照, Figure 2: z 方向の力 $\beta \sin L$ (図中 F) によって P は

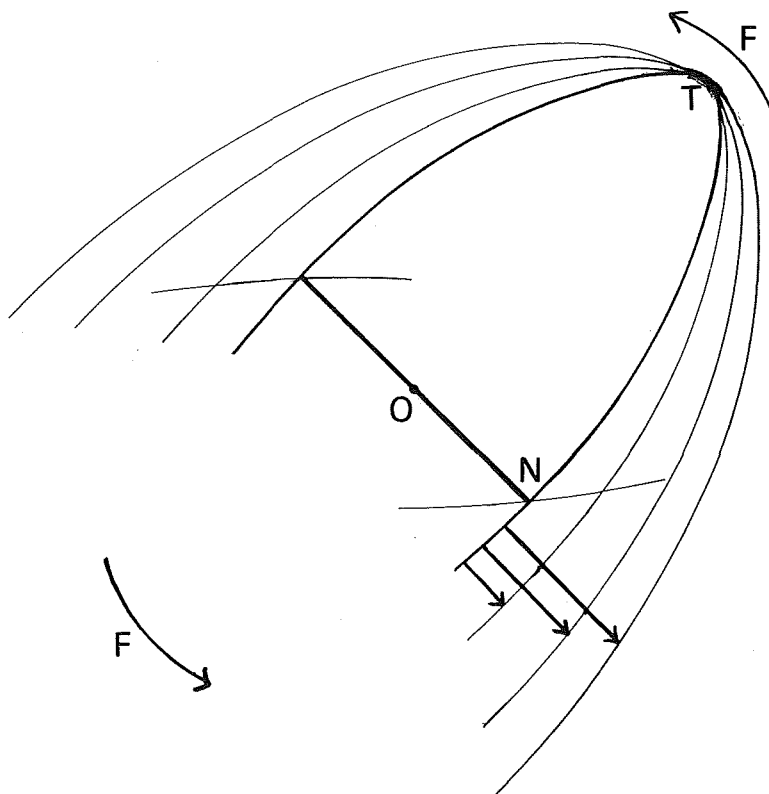


Figure 2

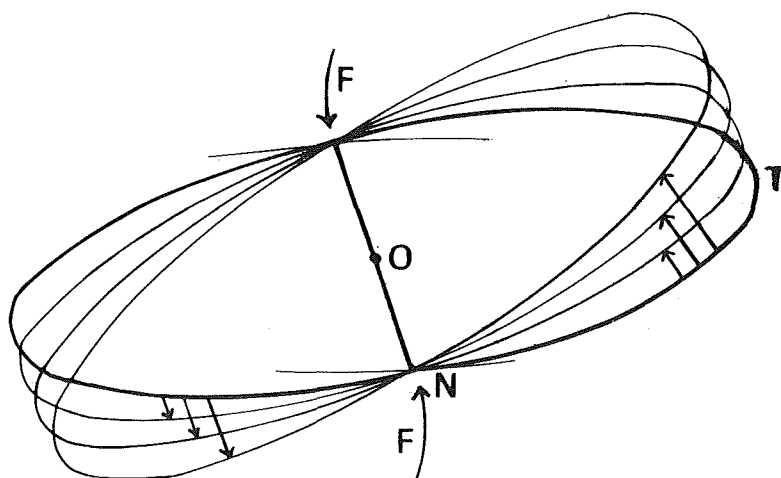


Figure 3

ON 方向のトルクを受け、軌道面は OT を軸として回転するため Ω に永年振動が生じる。Figure 3 : z 方向の力 $\alpha \cos L$ (図中 F)によって P は TO 方向のトルクを受け、軌道面は ON を軸として回転するため i に永年振動を生じる。)

z の共鳴の幾何学的意味あいは軌道面の回転であると解釈できる。

(2) $\frac{\partial R}{\partial z} = C$ (定数) の場合

微分方程式(2)の解は明らかに、

$$\delta z = \frac{C}{n^2} + C_3 \cos L + C_4 \sin L \quad \dots\dots\dots (9)$$

(C_3, C_4 は積分定数)

第二、第三項は(1)と同様に解釈される。第一項は定数であるから、この場合もやはり人工衛星の軌道はある平面内に収まっている。

この場合は、 z 方向に一定の力を受けることによって、軌道面が平行移動した、と解釈される。(Figure 4 参照)

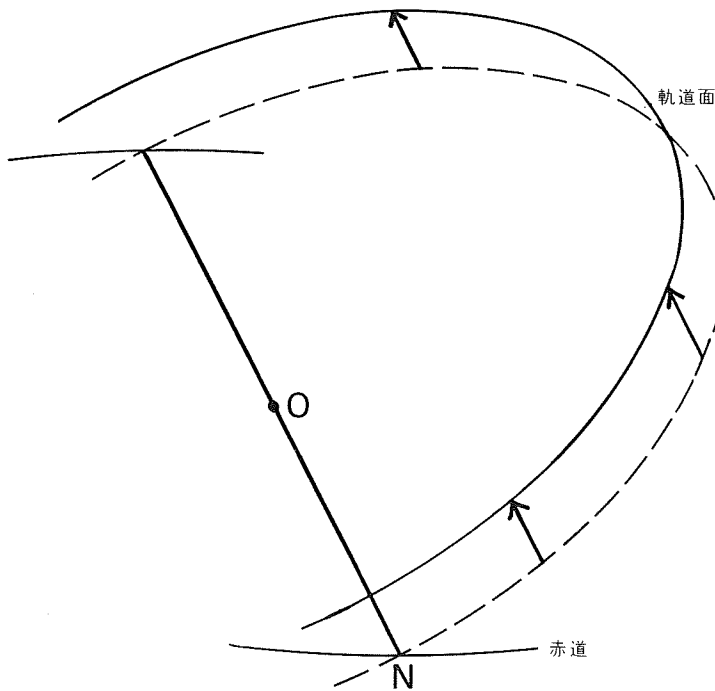


Figure 4

(1), (2)共、人工衛星の軌道は、短いタイムスケールなら、一次の理論、 e を無視する近似で、平面運動をしていることがわかる。

ところで、ほとんどの人工衛星に加わる摂動の主要部は(1), (2)のいずれかに該当している。

地球の重力場、月・太陽の重力場、潮汐による摂動などの主要部分は(1)の場合に、太陽の輻射圧による摂動の主要部分は(2)の場合に各々当たっている。

さらに、主要項ではないが、地球の重力場および月・太陽の摂動の高次の項からも(1), (2)のタームが出てくる。偶数次からは(1)、奇数次からは(2)が各々出てくる。高次では上記以外の項もあるので摂動は二次元にならないが、 Ω に現われる永年項は上と同様に定量的に説明できる。

4. 地球の偏平さによる摂動(主要項)

地球のポテンシャルは緯度 φ のみによる部分と、経度 λ にも依存する部分に分けられて、

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_n^m(\sin \varphi) (C_{n,m} \cos m \lambda + S_{n,m} \sin m \lambda) \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left(\begin{array}{l} P_n : \text{Legendre の多項式, } P_n^m : \text{Legendre の陪多項式} \\ a_e : \text{地球の赤道半径} \end{array} \right)$$

第二項は緯度のみによる部分、第三項は経度にも依存する部分で、第一項は二体問題のポテンシャルにはほかならない。

第二項以下の主要項は緯度のみによる項のうち $n = 2$ の場合 (以下 J_2 による摂動と書く) で、他の約1000倍の大きさを持っている。

ここでは J_2 による摂動のみを考えよう。

$$R = -\frac{\mu}{r^3} J_2 P_2(\sin \varphi)$$

$$= \frac{\mu}{r^3} J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i + \frac{3}{4} \sin^2 i \cos 2(f + \omega) \right) \dots\dots\dots (11)$$

ところで、

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r \sin(f + \omega)} \frac{\partial R}{\partial i} \dots\dots\dots (12)$$

であるから、(11)より、

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{r^4} J_2 \sin 2i \sin(f + \omega)$$

$r \sim a$ とすると、

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{a^4} J_2 \sin 2i \sin L \dots\dots\dots (13)$$

これは前節(1)で $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{a^4} J_2 \sin 2i$ とおいた場合に相当し、短周期摂動は二次元になる。

(7)を用いると、

$$\left(\begin{array}{l} \dot{i} = 0 \\ \dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \frac{J_2 \cos i}{a} n \end{array} \right) \dots\dots\dots (14)$$

と求まる。これはもちろん他の摂動論から求めた結果と $e \rightarrow 0$ の極限で一致する。

地球のポテンシャルのうち J_2 以外の項からは、 $\sin 2L$, $\cos 3L$ など高い周波数の摂動が出てきて、軌道は z 方向にも振動する。このため高次の摂動は二次元ではない。

5. 月・太陽による摂動 (主要項)

月または太陽の赤経 α , 赤緯 δ を用いると人工衛星-地心-月(または太陽)のなす角 S は (古在, 1973)

$$\cos S = A \cos L + B \sin L \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\left(\begin{array}{l} A = \cos \delta \cos(\Omega - \alpha) \\ B = -\cos \delta \cos i \sin(\Omega - \alpha) + \sin \delta \sin i \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

で与えられる. 月・太陽の摂動関数は

$$R = n'^2 r^2 \beta \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \left\{ P_2(\cos S) + \frac{r}{r'} P_3(\cos S) + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_4(\cos S) + \dots\dots \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\left(\begin{array}{l} ' \text{は月または太陽を表わす.} \\ \beta = \frac{m'}{m' + M} = 0.0123 \quad (\text{月}) \\ \quad \quad \quad = 1 \quad (\text{太陽}) \end{array} \right)$$

ここでも最大の大きさをもつ第一項のみを考える.

$$R = n'^2 r^2 \beta \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \left[\frac{1}{4} \{ 3(A^2 + B^2) - 2 \} + \frac{3}{4} \{ (A^2 - B^2) \cos 2L + 2AB \sin 2L \} \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

(12)を用いると,

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 3n'^2 \beta r \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{\partial B}{\partial i} (A \cos L + B \sin L)$$

$r \sim a$ として,

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 3n'^2 \beta a \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{\partial B}{\partial i} (A \cos L + B \sin L) \quad \dots\dots\dots (19)$$

月・太陽の位置は短い期間なら一定とみて差支えないから, $A, B, \frac{\partial B}{\partial i}, r'$ は定数とみなせて上式は
 $\alpha = 3n'^2 \beta a \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{\partial B}{\partial i} A, \beta = 3n'^2 \beta a \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{\partial B}{\partial i} B$ とおいた場合になっている. よって短周期摂動は二次元である. (7)より直ちに i と Ω の時間微分が求まる.

$$\left(\begin{array}{l} \dot{i} = \frac{3n'^2}{2n} \beta \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{\partial B}{\partial i} A \\ \dot{\Omega} = \frac{3n'^2}{2n} \beta \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{\partial B}{\partial i} B \frac{1}{\sin i} \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

これも他の摂動論と $e \rightarrow 0$ で一致する.

上式からは月・太陽の位置が実際は変化するために長周期項と永年項が生ずる. i については永年項はない.

6. 潮汐による摂動 (主要項)

月・太陽によって誘起された地球の潮汐による摂動関数の主要項は、(古在, 1979)

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{Gm' a_e^2}{r^3 r'^3} k_2 P_2(\cos S^*) \\
 &= \frac{n'^2}{r^3} \beta a_e^2 \left(\frac{a'}{r^*}\right)^3 k_2 P_2(\cos S^*) \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

(* は潮汐の遅れを差引いた仮想的な月・太陽を表わす。)
 k_2 : ラブ係数

(12)を用いて,

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 3n'^2 \beta \frac{a_e^2}{a^4} \left(\frac{a'}{r^*}\right)^3 k_2 \frac{\partial B^*}{\partial i} (A^* \cos L + B^* \sin L) \dots\dots\dots (22)$$

これもまた、 $\alpha = 3n'^2 \beta \frac{a_e^2}{a^4} \left(\frac{a'}{r^*}\right)^3 k_2 \frac{\partial B^*}{\partial i} A^*$, $\beta = 3n'^2 \beta \frac{a_e^2}{a^4} \left(\frac{a'}{r^*}\right)^3 k_2 \frac{\partial B^*}{\partial i} B^*$ とおいた場合に等しいから、短周期摂動は二次元である。

7. 太陽の輻射圧による摂動

太陽の輻射圧の面に垂直方向の方向余弦をWとすると,

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \mu F W \dots\dots\dots (23)$$

(μF : 単位質量あたりの輻射圧による力)

F , W は定数と見なすと、輻射圧による摂動は3項の(2)に該当し、二次元である。

また(9)より、軌道面は z 方向に,

$$\delta z = \frac{\mu F W}{n^2} \dots\dots\dots (24)$$

だけ浮き上がっていることになる。

8. 地球の偏平さによる摂動 (高次)

地球のポテンシャル(10)のうち緯度のみ依存する項 (zonal part) からは(1), (2)の両方が出てくる。

(1) n が偶数の場合 ($n=2r$)

$$\sin \varphi = \sin i \sin L \dots\dots\dots (25)$$

より、(10)は、(古在, 1979)

$$\begin{aligned}
 R &= -\frac{\mu J_{2r}}{r^{2r+1}} \left\{ \sum_{j=0}^r (-1)^{r+j} \frac{(2r+2j-1)!!}{(2r-2j)!!} \frac{(\sin i)^{2j}}{2^{2j}} \frac{1}{(j!)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^r \cos 2kL \sum_{j=k}^r (-1)^{r+j-k} \frac{(2r+2j-1)!!}{(2r-2j)!!} \frac{(\sin i)^{2j}}{2^{2j-1}} \frac{1}{(j-k)!(j+k)!} \right\} \dots\dots (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{1}{r \sin L} \frac{\partial R}{\partial i} \\ &= -\frac{\mu J_{2r}}{r^{2r+2} \sin L} \left\{ \sum_{j=0}^r (-1)^{r+j} \frac{(2r+2j-1)!!}{(2r-2j)!!} \frac{2j(\sin i)^{2j-1} \cos i}{2^{2j}} \frac{1}{(j!)^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^r \cos 2kL \sum_{j=k}^r (-1)^{r+j-k} \frac{(2r+2j-1)!!}{(2r-2j)!!} \frac{2j(\sin i)^{2j-1} \cos i}{2^{2j-1}} \frac{1}{(j-k)!(j+k)!} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで $e \sim 0$ とし、右辺を L でフーリエ展開すると、下式の形になっていることがわかる。

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\mu J_{2r}}{a^{2r+2}} \sum_{j=1}^r \beta_j \sin(2j-1)L \quad \dots\dots\dots (28)$$

$j=1$ からは z の共鳴項が得られる。 $r=1$ の時は共鳴項のみとなる。

$r \geq 2$ の時は $\sin 3L$, $\sin 5L$ などが現われ摂動は二次元にならない。(27), (28) を比較して、

$$\beta_1 = 2 \sum_{j=0}^r (-1)^{r+j} \frac{(2r+2j-1)!!}{(2r-2j)!!} \frac{j(\sin i)^{2j-1} \cos i}{2^{2j-1}} \frac{1}{(j!)^2} \quad \dots\dots\dots (29)$$

(7)より \mathcal{Q} の永年摂動が計算できる。

$$\dot{\mathcal{Q}} = -\frac{J_{2r}}{a^{2r}} n \cos i \sum_{j=1}^r (-1)^{r+j} j \frac{(2r+2j-1)!!}{(2r-2j)} \frac{(\sin i)^{2j-2}}{2^{2j-1}(j!)^2} \quad \dots\dots\dots (30)$$

これは $e \rightarrow 0$ で正しい結果を与えている。

$j=1$ の共鳴項のみから永年摂動が生じ、 $j \geq 2$ からは生じない理由は、以下のように考えることができる。

ON 方向 (Figure 1 参照) に x 軸、軌道面内にあり x 軸に垂直方向に y 軸をとり、 z 方向の力を、
 $F_z = \sum_j (a_j \cos jL + b_j \sin jL)$ とおく。軌道面を回転させるトルクの平均値は、

$$\begin{aligned} \langle T_x \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (yF_z - zF_y) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau yF_z dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \sin L \sum_j (a_j \cos jL + b_j \sin jL) dL \\ &= \frac{a}{2} b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle T_y \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (zF_x - xF_z) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos L \sum_j (a_j \cos jL + b_j \sin jL) dL \\ &= -\frac{a}{2} a_1 \end{aligned}$$

$j \geq 2$ の高次の項によるトルクは平均すると 0 となり、永年摂動には寄与しない。

したがって \mathcal{Q} , j の永年摂動 (軌道面の回転) は共鳴項 ($j=1$) のみから生じていることがわかる。

(2) n が奇数の場合 ($n = 2r + 1$)

$$R = -\frac{\mu J_{2r+1}}{r^{2r+2}} \sum_{k=0}^r \sin(2k+1) L \sum_{j=k}^r (-1)^{r+j-k} \frac{(2r+2j+1)!! (\sin i)^{2j+1}}{(2r-2j)!! 2^{2j}} \frac{1}{(j-k)!(j+k+1)!} \dots\dots (31)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\mu J_{2r+1}}{r^{2r+3} \sin L} \sum_{k=0}^r \sin(2k+1) L \sum_{j=k}^r (-1)^{r+j-k} \frac{(2r+2j+1)!! (2j+1) (\sin i)^{2j} \cos i}{(2r-2j)!! 2^{2j}} \frac{1}{(j-k)!(j+k+1)!} \dots\dots (32)$$

$e \sim 0$ で右辺をフーリエ展開すると下の形になる。

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\mu J_{2r+1}}{a^{2r+3}} \sum_{j=0}^r \alpha_j \cos 2jL \dots\dots (33)$$

$j = 0$ からは軌道面が定数

$$\delta z = -\frac{\mu J_{2r+1}}{a^{2r+3}} \frac{\alpha_0}{n^2} \dots\dots (34)$$

だけ浮き上がる摂動が加わる。 Ω , i には永年項は現われない。

ここでも $r \geq 1$ の場合は摂動は二次元にならない。

9. 他の高次の摂動

月・太陽の摂動，潮汐による摂動についても同様にポテンシャルの偶数次からは軌道面を回転させる項 (3項の(1))が現われ，奇数次からは面を平行移動させる項 (3項の(2))が生じる。

10. 考 察

具体例をあげてみると，測地衛星ラジオス ($a = 1.2 \times 10^7 \text{m}$, $e = 0.004$, $i = 107^\circ$) は面内の短周期摂動は600mの振幅を持つが，面に垂直方向には3mほどに過ぎない，航行衛星GPS ($a = 2.6 \times 10^7 \text{m}$, $e = 0.003$, $i = 63^\circ$) では前者が300m，後者が7mである。

多くの人工衛星は円軌道に近いので，精度をさほど要しない場合は，摂動が二次元であることを利用して予報形式を簡素化できる。

月・太陽の位置は動くから，半月および半年のタイムスケールで α, β は変化している。したがって軌道面は半月ほどでフラつきながら，平均的には一定の角速度で動いていることになる。

以上の議論は円運動かつ一次の理論に限る。

$e \neq 0$ では運動方程式(1)が単振動にならず，共鳴など物理的解釈がスッキリとできない。

高次の理論では，摂動を小さくするよう改めて軌道要素を定義しなおすことになり，この取扱いでは煩雑である。

筆者がこの問題に気付いたのはGPSの軌道パラメーターを解析的に計算している時であった。まず J_2 次，次に月・太陽とほとんどすべての摂動の主要部は二次元であることは驚きであった。これを現象論でなく，何とか物理的に解釈できないか，と思い本稿に至った。

*THE TWO DIMENSIONAL
SHORT PERIODIC PERTURBATIONS
ON THE CIRCULAR ARTIFICIAL SATELLITES*

149

参 考 文 献

Brouwer and Clemence 1961 : Methods of Celestial Mechanics, Academic Press.

古在由秀 1979 : 人工衛星の軌道 宇宙開発事業団

古在由秀 1973 :

A new method to compute lunisolar perterbations in satellite motion, SAO special report 349.

K.Aksnes 1976 : Celestial Mechanics, 13, 89.