# 座標系回転による潮汐分潮の算出

西田英男：海洋研究室

Hideo Nishida：Maritime Research Laboratory

## 1．はじめに

潮汐ポテンシャルの展開は古くはDarwinから始まり，Doodson，最近ではCartwright 等によって行われており，現時点で特につけ加えることはない。既に数多くの分潮が表の形で与えられており，実用上特に問題となることは無い。海洋潮汐においては分潮の詳細な形を与えても，風による海面昇降や海水の潮汐力に対する応答などで天文分潮以外の成分が多く混じってしまい，天文分潮の詳細な形を与えることはそれほど意味のあることではない。一方，地球潮汐の分野では固体地球の潮汐力に対する応答は海水のように内部過程を伴わずストレートにでるために，むしろ，この分野のの人たちが精力的に仕事をしている。

しかしながら，海洋学の教科書の潮汐の部分を見ると簡単な展開によって日周潮，半日周潮，長周期潮の成因を説明すると後は与えられた表の中から係数の大きな分潮を取り出すという形で説明が行われており，分潮の生ずる過程については説明が与えられていないことが多い。そのため，潮汐ポテンシャルの展開を段階的に行い，各分潮の意味を理解することは海洋潮汐の理解の上でも必ずしも意味のないことではない。本稿ではポテンシャルの展開を軌道面の回転，楕円効果の導入，距離効果の導入の順番に段階的に進め主要な分潮の生成過程を明らかにし，その意味するところを理解する事を目的とする。

## 2．潮汐ポテンシャル

本論では潮汐ポテンシャルの形は既知のものとする。潮汐学のあらゆる教科書に書いてあるように，ポテンシャルは次の形をとる。

$$\Omega = (-3/2)\, GM/d^3a^2 \times (\cos^2\theta - 1/3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-1)$$

このポテンシャルより平衡潮汐の大きさを計算すると

$$\eta = (3/2)\,(M/E)\,(a/d)^3 \times a\,(\cos^2\theta - 1/3) \quad \cdots\cdots\cdots (2-2)$$

上の式で，$G$ は重力定数，$M$ は天体の質量，$E$ は地球の質量，$d$ は天体と地球との間の距離，$\theta$ はポテンシャルを計算する地球上の点と天体の方向のなす角である。上の式の中で時間と共に変化する量は $\theta$ と $d$ の2つである。式（2－2）を少し書き換えて

$$\eta = (3/4)\,(M/E)\,(a/c)^3 a\,(c/d)^3 \times (2\cos^2\theta - 2/3) \cdots\cdots\cdots\cdots (2-3)$$

上の式で，$c$ は地球と天体との間の平均距離である。（2－3）式から時間変化する部分だけを取り出して

$$\xi = (c/d)^3\,(2\cos^2\theta - 2/3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-4)$$

以降，この式の中の $(c/d)$ と $\cos\theta$ の2つを書き換えて，引数に時間的に一様に変化する変数だけを持ったcos関数の和に直すことを潮汐のポテンシャル展開という。

後の話の理解のために，今ここで多少の説明を加えておくと，$d$ は地球と天体の間の距離であるから，

$d$ が変化するのは，天体の運動が完全な円運動ではなく，楕円運動をすることによって生ずる。それ故，$(c/d)$ はおおむね1に近い数値を取る。それに引き替え，$\cos\theta$ は－1から1の間を変化するので，重要性からいって $(2\cos^2\theta - 2/3)$ の方がはるかに大きい。そのため，本稿ではこの角度成分の展開を主として行う。角度成分について不必要な2倍をしているように見えるが，これは後の分潮の係数比較のためである。各分潮の重要性の比較のためにその係数を算出するが，最も大きな分潮，即ちM2分潮の係数の大きさが約1となるようにするが，そのためにはここで角度成分を2倍しておいた方が便利である。

## 3．ポテンシャル展開のための基礎知識

### 3－1　基礎天文因数

2において時間的に一様に変化する変数と言う言葉を使ったが，天体の運動に関する知識を使うと利用すべき変数としては，全部で6つの変数を用いればよいことがわかる。これを基礎天文因数という。これらの変数は次の通りである。

地球の観測点の恒星時 $(\chi)$

太陽の平均黄経 $(h)$ と近地点黄経 $(ps)$

太陰の平均黄経 $(s)$，昇交点黄経 $(N)$，

近地点黄経 $(p)$

以下，それぞれの変数がでてくる過程を天球上の天体運動の知識を使い簡単に説明する。

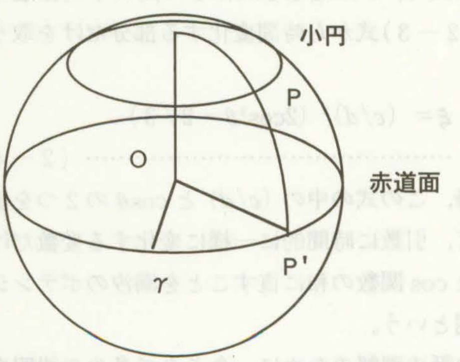


図3－1　地球上の観測点の天球上での運動

### 3－2　天球上での地球上の観測点の運動

図3－1の天球において $\gamma$ は春分点，Pは観測点とする。すると，地球の自転に伴い，観測点Pは図の小円上を一定の角速度で運動し，1恒星日で1回転することになる。このように春分点を基準とした座標をとった場合は1太陽日（24時間）ではなく，1恒星日（23時間56分4秒）となる事に注意をしておく。Pを通る子午面が赤道面と交わる点をP'として，$\angle \gamma$OP を $\chi$ とすれば，地球上の観測点はこの $\chi$ と緯度 $\phi$（$=\angle$ POP'）の2つを用いて表現することができる。$\phi$ は定数であり，$\chi$ は一様に変化する変数であるので，$\chi$ を基礎天文引数の一つとして採用することにする。

### 3－3　天球上での太陽の運動

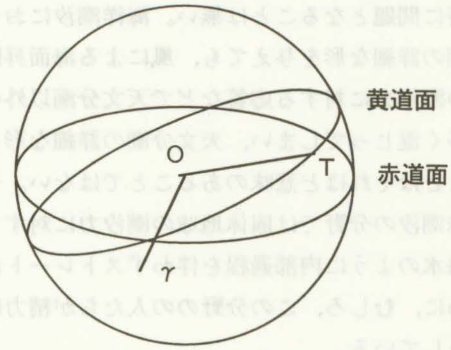


図3－2　天球上の太陽の運動

3－1と同様の天球上で太陽の運動を考えると，太陽は赤道面と23度27分傾いた黄道面上を運動することになる(図3－2参照)。この黄道面を1年で一周する事になる。黄道面が南から北へ赤道面をよぎる点は即ち春分点である。それ故，太陽の位置を $\gamma$ を基準としたこの座標系で表すには，太陽の位置をTとして，黄道面上の角度 $\angle \gamma$OT（太陽の黄経，$x$ とおく）が与えられれば良いことがわかる。ただし，この角度 $x$ は基礎天文因数としては使えない。その理由は，地球を中心と考えた太陽の運動は円運動ではなく，正確には楕円運動となり，黄経 $x$ は一様に変化する変数とはならないからである。そのため，

一回転分を平均し，平均角速度で回る平均的な太陽（平均太陽）というものを考え，その平均太陽の黄経（平均黄経，$h$）を使うことにする。真の黄経$x$と平均黄経$h$の関係を説明するために，少し誇張した図を次に載せる。

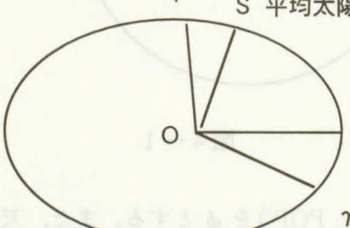


図３－３　真の黄経と平均黄経の関係

図３－３は黄道面である。図において真の黄経は∠TO$\gamma$となり，平均黄経は∠SO$\gamma$となる。面積角度一定の法則から近地点付近では実際の太陽は平均太陽よりも先に行っている様子が描かれている。$x$と$h$は近地点において一致するように定義する。運動が完全に楕円運動ならば，近地点から角度を測り，次の関係が成り立つ。

$$\angle \mathrm{TOX} = \angle \mathrm{SOX} + 2e\sin\angle \mathrm{SOX} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3-1)$$

ここで$e$は楕円の離心率である。真の黄経，平均黄経とも春分点$\gamma$から測るので（３－１）式は次のようになる。

$$x = h + 2e\sin(h - ps) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3-2)$$

ここで，$ps$は近地点の平均黄経である。

ここまで持ってくると太陽の平均黄経$h$および近地点の平均黄経$ps$は一様変化する変数と考えられる。よって，太陽の運動に関する基礎天文因数は$h$と$ps$の２つとなる。

３－４　天球上における太陰の運動

太陰の運動は太陽の運動よりもう一つ複雑になる。太陰の軌道面は黄道面よりさらに５度傾いている。この面を白道面という（図３－４参照）。太陰は

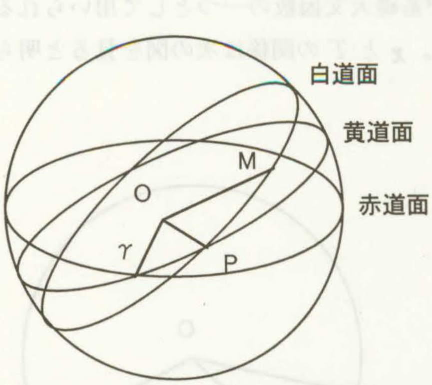


図３－４　天球上の太陰の運動

この白道面に沿って約一月で一周する。太陰が黄道面をよぎる点（図の点P）を昇交点というが，この昇交点もゆっくりではあるが移動する（18.6年で黄道を一周する。しかし，移動の向きは太陰の方向とは逆に西向きである。）。そのため，太陰の位置（図中のM点）を春分点$\gamma$を基準にして表すには図の中の∠$\gamma$OP（$N$と言う文字を使う，この角は一様変化すると考えて良い）と∠POMの２つを与える必要がある。異なる面の角度であるが，通常この２つの角度を加えて太陰の黄経$x$と呼びならわしている。太陰の運動も楕円運動であることから，太陽の時と同様に平均太陰を考えてその黄経を平均黄経という。これを$s$で表す。$x$と$s$の関係は楕円運動を考慮した太陽と同等の式が得られるはずであるが，太陰の運動は太陽よりはるかに複雑であり，太陽の影響も受けて運動し，その軌道はもはや単純な楕円とは言えない。$x$と$s$の関係は次のようになる。

$$x = s + f\ (e,\ s,\ h,\ p) \quad \cdots\cdots\cdots (3-3)$$

$f$()はsよりも一桁小さい数であるが，楕円運動で考慮される離心率（$e$），平均黄経（$s$），近地点黄経（$p$）の他に太陽の平均黄経$h$も関係している。

以上のことから，太陰の運動を表す基礎天文因数としては　$s$，$N$，$p$の３つが必要であることがわかる。

３－５　基礎天文因数の別表現

地球自転による恒星時$\chi$の代わりに太陽に時角

$T$ が基礎天文因数の一つとして用いられることもある。$\chi$ と $T$ の関係は次の図を見ると明らかである。

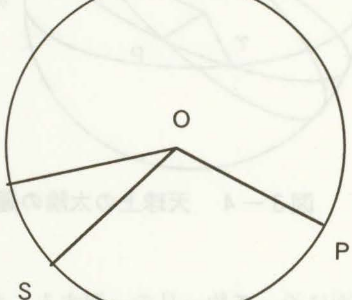


図3－5　恒星時と太陽の時角の関係

図は赤道面を想定しており，Pは観測点の位置であり，Sは平均太陽の位置を表す。すると恒星時 $\chi$ は∠PO$\gamma$ となる。一方，太陽の時角はPから西向きに測って太陽の位置まで，即ち，∠POSである。∠SO$\gamma$ は平均太陽の黄経 $h$ と等しいので次の関係が得られる。

$\chi = T + h$ ……………………………（3－4）

この式を用いて置き換えれば，基礎天文因数の一つとして $\chi$ の代わりに $T$ を使うことが可能である。

## 4．潮汐現象説明のための簡単な展開

### 4－1　簡単な展開

潮汐学の教科書にはどれでものっている説明であるが，後の話の展開上ここで簡単な展開をやっておく。図4－1の天球ににおいて，Oは地球の中心であり，座標系を次のようにとる。

$X$ 軸――春分点の方向

$Y$ 軸――それと直角な方向

$Z$ 軸――天の北極方

Pは潮汐を計算しようとする地球上の点の天頂の延長であり，Tは潮汐を起こす天体（月または太陽）の位置とする。点Pの赤径（∠XOP'）を $\chi$ とし，

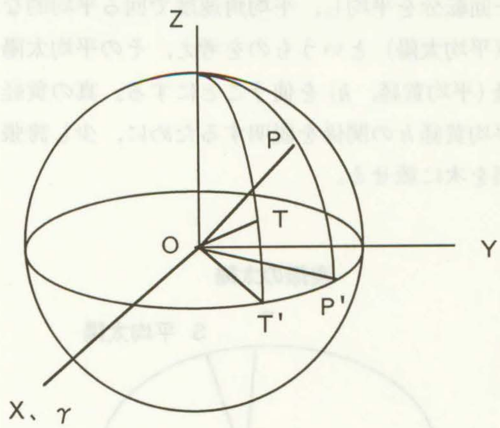


図4－1

赤緯（緯度，∠POP'）を $\phi$ とする。また，天体の位置Tの赤径（∠XOT'）を $\alpha$，赤緯（∠TOT'）を $\delta$ とする。ポテンシャル展開で問題となる $\theta$ はPOTである。

この章で述べる簡単な展開では，$\cos\theta$ を $\alpha$，$\delta$，$\chi$，$\phi$ の4つの量で表現することを考える。

（注）$\phi$ は地球上の緯度であり，時間的に変化しない完全な定数である。$\chi$ は時間的に一様に変化する値である。一方，$\alpha$ と $\delta$ は時間的に一様に変化する値ではないので，完全な展開形を得るには更に $\alpha$ と $\delta$ を時間的に一様に変化する値に置き換える必要がある。

$\cos\theta$ の書き換えには従来から球面三角法の公式が用いられている。また，全く同様のことをベクトル解析の公式を用いてもできる。本稿では後の展開でも用いるので後者の方法で説明を試みる。

地球上の位置の方向ベクトルは，図2の直交座標系を用い，次のように表せる。

$$\mathrm{P} = (\cos\phi\cos\chi \quad \cos\phi\sin\chi \quad \sin\phi)$$

同様に，天体の位置の方向ベクトルは，次のように表わせる。

$$\mathrm{T} = (\cos\delta\cos\alpha \quad \cos\delta\sin\alpha \quad \sin\delta)$$

2つのベクトルのなす角（ここでは $\theta$）の余弦はベクトルの内積で表せるので，成分同士の積を足しあわせて次の式が得られる。

$$\cos\theta=\cos\phi\cos\chi\cos\delta\cos\alpha$$
$$+\cos\phi\sin\chi\cos\delta\sin\alpha+\sin\phi\sin\delta$$

上式の第1項と第2項をあわせて,

$$\cos\theta=\cos\phi\cos\delta(\cos\chi\cos\alpha+\sin\chi\sin\alpha)$$
$$+\sin\phi\sin\delta$$
$$=\cos\phi\cos\delta\cos(\alpha-\chi)$$
$$+\sin\phi\sin\delta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4-1)$$

式(4―1)の中にでてくる $\alpha-\chi$ を $T'$とおいて,もう一度書いてみると

$$\cos\theta=\cos\phi\cos\delta\cos T'+\sin\phi\sin\delta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4-2)$$

$\delta$ の変化が小さく,定数と見なせる範囲では,この式は

$\cos\theta=a\cos T'+b$ (a, bはいずれも定数)

の形の簡単な式と見なせることに注意をしておく。この章の以下の計算では, $\phi$, $\delta$ の入った項は表現はされていても事実上定数とみなし,$T'$の入った項だけを計算することになる。

次に,式(4―2)で得られた $\cos\theta$ を潮汐ポテンシャルの式に代入して計算を行い,cos 関数の和に分けることを試みる。

(注)いまここで使った $T'$ ($=\alpha-\chi$) は天体の時角という意味を持っているが, $\alpha$ が時間的に一様に変化する値ではない為に $T'$も時間的に一様に変化する値ではないことに注意する必要がある。潮汐の基本的な引数の一つとして使われる平均太陽の時角 $T$ は赤道面を一定の角速度で動く仮想的な太陽の時角であるのでここで使われている $T'$とは意味が異なる。

$\cos^2\theta-1/3$ に式(4―2)を代入して, $\cos^2\theta$ の計算を行えば,

$$\cos^2\theta-1/3$$
$$=\cos^2\phi\cos^2\delta\cos^2 T'+\sin^2\phi\sin^2\delta$$
$$+2\cos\phi\cos\delta\sin\phi\sin\delta\cos T'-1/3$$

が得られる。さて,$T'$について着目して,展開を進めることにする。まず,第1項めは $\cos^2 T'$が入っている。これでは cos 関数の和に分解できていないので

三角関数の公式

$$\cos^2 x=(1/2)(1+\cos 2x)$$

を使って書き換える。第2項目は定数×$\cos T'$の形なのでそのままでよい。

よって,計算を実行すると

$$\cos^2\theta-1/3$$
$$=(1/2)\cos^2\phi\cos^2\delta(1+\cos 2T')$$
$$+(1/2)\sin 2\phi\sin 2\delta\cos T'$$
$$+\sin^2\phi\sin^2\delta-1/3$$

$\cos 2T'$を含む項, $\cos T'$を含む項,それ以外の項(定数項)の3つに整理すると次のようになる。

$=(1/2)\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2T'$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cos 2T'$を含む項

$+(1/2)\sin 2\phi\sin 2\delta\cos T$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cos T'$を含む項

$+(1/2)\cos^2\phi\cos^2\delta+\sin^2\phi\sin^2\delta$

$-1/3$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots T'$を含まない項

$\phi$, $\delta$ を含む係数についても多少の計算をしているが,これは表示を簡単にするだけの意味で,ポテンシャル展開の本質とは関係のない部分である。これで,簡単な展開は終了であるが,最後の $T'$を含まない項については他の教科書等で別途表記がなされているので,その形を合わせるために $\cos\phi$, $\cos\delta$ をそれぞれ sin に書き換えると

$$(1/2)\cos^2\phi\cos^2\delta+\sin^2\phi\sin^2\delta-1/3$$
$$=(1/2)(1-\sin^2\phi)(1-\sin^2\delta)$$
$$+\sin^2\phi\sin^2\delta-1/3$$
$$=(3/2)\sin^2\phi\sin^2\delta-(1/2)(\sin^2\phi+\sin^2\delta)+1/6$$
$$=(3/2)(\sin^2\phi\sin^2\delta-(1/3)(\sin^2\phi+\sin^2\delta)+1/9)$$
$$=(3/2)\{(1/3)-\sin^2\phi\}\{(1/3)-\sin^2\delta\}$$

よって,最終的に

$$\cos^2\theta-1/3$$
$$=(1/2)\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2T'$$

: 2 $T'$を含む項(半日周潮)

$$+(1/2)\sin 2\phi\sin 2\delta\cos T'$$

：$T'$を含む項（日周潮）

＋（3／2）（1／3－$\sin^2\phi$）（1／3－$\sin^2\delta$）

：長周期潮

…………………………………（4－3）

の形になる。

4－2　簡単な展開による潮汐現象の説明

まず，第1項目は変化する成分として$\cos 2T'$を含んでいる。$T'$が一日に約360度変化するのであるから，$\cos 2T'$は半日で1周期変化することになり，その故，半日周潮と呼ばれる。第2項目は，$\cos T'$を含んでおり，同様に考えると，一日で1周期変化し，日周潮と呼ばれる。第3項は一日程度では定数と考えて良いが，例えば，月の場合一月で$\delta$は一周期変化するので，長周期潮と呼ぶことにする。

もし，$\delta$が完全な定数で，$T'$が時間とともに一様に変化する変数であれば，ポテンシャル展開はこれでおわりで，潮汐には半日周潮と日周潮の2つしか存在しないことになるが，実際は$\delta$はゆっくり変化し，かつ，$\alpha$がゆっくりではあるが，不規則変化をし，それゆえ$T'$は不規則変化を行う。この効果を考慮にいれた場合，式（4－3）の各分潮はもはや単一の分潮とはいえず，いくつかの分潮の重ね合わせとなる。そしてその重ね合わせにより，上述のゆっくりした変化を表現する必要がでてくる。

次に，それぞれの分潮にかかる係数について考えてみる。半日周潮には$\cos^2\delta$がかかっている。$\cos\delta$は$\delta=0$の時最大値1をとるので，半日周潮は天体の赤緯がゼロの時最大となることがわかる。太陽の場合は春分の頃と秋分の頃である。月の場合は一月に2回現れる（これは太陽と月が重なる大潮・小潮の現象とは異なるから注意）。半日周潮には$\cos^2\phi$もかかっている。この係数の意味するところは次の通りである。即ち，緯度帯毎に潮汐の大きさは異なっており，赤道上では半日周潮は最大となり，両極に近づくに従って小さくなり，理論上両極の上では半日周潮はゼロとなる。

日周潮には$\sin 2\delta$がかかっている。この関数は$\delta=0$の時ゼロとなる。それ故，天体の赤緯がゼロの時は日周潮はゼロとなる。太陽でいえば，春分の頃と秋分の頃がそれに当たる。$\sin^2\delta$は$\delta=45$度になるまでは増加する。月も太陽も赤緯はそこまで大きくならないので，赤緯が最大の時に日周潮が最大となることがわかる。太陽でいえば，夏至と冬至の頃に日周潮が最大となる。緯度$\phi$についていえば，$\sin 2\phi$が係数の中に入っている。そのため，赤道と両極では理論上日周潮はゼロとなる。最大値は中緯度の45度で起きる。

次に，半日周潮と日周潮を比較する。緯度$\phi$についての係数が半日周潮と日周潮では異なっているが，天体の赤緯$\delta$の係数は半日周潮が$\cos^2\delta$であり，日周潮が$\sin 2\delta$である。$\delta$の値はゼロを中心とする比較的小さい値の範囲を動くので，たいていの場合，$\cos^2\delta$の方が$\sin 2\delta$より大きい。すなわち，半日周潮の方が日周潮より大きいといえるであろう。一方，緯度$\phi$の項を見ると極に近づくに従って半日周潮はゼロに近づくので，高緯度帯では日周潮の方が卓越してくることがわかる。

## 5．展開の方法

5－1　展開の原理

4においては分潮の生ずる原理を理解するために，簡単なポテンシャル展開を行ったが，この章では本格的な展開を行う方法を説明する。

4の最後の式でおおまかに日周潮，半日周潮，長周期潮に分けられているが，4－2で説明したように，この式の中に入っている$\alpha$（赤経）と$\delta$（赤緯）は時間と共に一様に変化する変数ではない。そのため，最終的に分潮に分解するには，$\delta$と$\alpha$のかわりに時間的に一様に変化する変数（基本天文因数）に書き換える必要がある。また，4では無視したが，ポテンシャルの中に入っている$d$（天体と地球の間の距離）も変化するため，これらについても基本天文因数を用いて表現する必要がある。

ここから先の展開は必ずしも一通りの方法とは限らず，歴史的にもいくつか試みられている。

Doodsonは「Admiralty Manual of Tide」の中で式（4－3）の中の$\delta$と$\alpha$を展開式を用いて天体の軌道面内の角度に置き換える方法を説明している。この方法は簡単な展開から順を追って複雑な展開へ導くという意味で分かり易いのであるが，展開の最初の段階から近似式がでてきて分潮の意味を捉えるという点ではかえってわかりにくくなっている。

中野は「潮汐学」の中でDarwinの展開法を説明しているが，太陰の昇交点黄経（太陰潮の展開のところでてくる$N$）については展開を行わず，ゆっくり変化する係数および引数として処理を行っている。ここの部分がDoodsonによって不完全展開であるとして後に指摘された部分である。これについては後で太陰潮汐の$fu$問題として詳しく扱うことにする。

本稿では分かりやすさという観点から，球面三角法の使用を避け一貫して直交座標系の座標変換を用い，最後にベクトル解析の公式を用いて$\cos\theta$を計算することとする。ここまでで，軌道面が傾いていることによる基本的な効果は全て表現されることになる。ここまでの展開を終えた後，軌道が楕円である効果を導入して展開を進めることになる。しかしながら，最後まで展開した結果を与えるには相当のページ数が必要なため，本稿においては具体的な展開結果を与えるのは軌道面傾きの効果だけにして，楕円展開の結果についてはまた別の稿で説明をしたいと思う。

5　2　座標変換による展開

方法は基本的に4－1の中で説明した方法と同じである。すなわち，角度成分については，地球上の観測点のの方向ベクトルと天体の方向ベクトルを地心直交座標系で表現し，ベクトル解析の公式を用い$\cos\theta$を計算し，その値をポテンシャルの式に代入する。後は三角関数の公式を用い，ひたすら，cos関数の和に分解していくことになる。

具体的に説明すると次のようになる。

(1)　軌道面の傾きによる展開

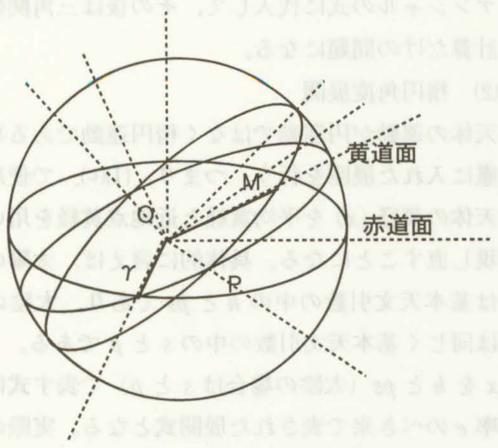


図5－1　座標系回転説明図

(a)　最終的に天体の位置を表現する座標系を地心赤道直交座標系とする。X軸を春分点の方角にとる（図5－1参照）。これは図4－1と同じ座標系である。

(b)　地球上の1点の方向ベクトルを$\chi$，$\phi$を用いて表す。これも4－1で行ったのと同様の方法である。

(c)　天体の位置の方向ベクトルをまず，天体の軌道面が$XY$座標面となるような座標系で表す。4－1では天体の位置の方向ベクトルは，最初から地心赤道直交座標系の上で$\alpha$と$\delta$を用いて表したが，ここでは別の表し方をとる。即ち，太陽の場合は春分点から測った黄経$x$を用い，太陰の場合は春分点からの黄経と同時に昇交点黄経$N$を用いて表す

(d)　次に座標系の変換を行い，天体位置の方向ベクトルを地心赤道直交座標系で表現する。即ち，観測点の位置と天体の位置の両ベクトルを同じ座標系で表現するわけである。太陽の場合は1回だけ座標系を回転させればよいが，太陰の場合は3回回転させる必要がある。

(e)　これで2つのベクトルが同じ座標系で表現できたので内積をとることによって$\cos\theta$は求まる。

(f)　ここまで準備が整えば後は求まった$\cos\theta$をポ

テンシャルの式に代入して，その後は三角関数の計算だけの問題になる。

(2) 楕円角度展開

天体の運動が円運動ではなく楕円運動である事を考慮に入れた展開を行う。つまり，(1)(c)．で使用した天体の黄経 $(x)$ を平均黄経と近地点黄経を用いて表現し直すことになる。具体的に言えば，太陽の場合は基本天文引数の中の $h$ と $ps$ であり，太陰の場合は同じく基本天文引数の中の $s$ と $p$ である。

$x$ を $h$ と $ps$（太陰の場合は $s$ と $p$）で表す式は離心率 $e$ のべき乗で表された展開式となる。実際の計算は引数の中のxをその展開式で置き換え，cos関数のテーラー展開を行うことになる。そのため，$x$ の展開式を小さい項までとる気になれば，最終的に生じる展開項の数はいくらでも多くなる。実際は係数の大きさに一定の値を設けてそれより大きい項を拾うことになる。

ここまでで時間変化するポテンシャルの内，角度に関する部分（$\cos\theta$ の入った部分）の展開は終了する。

(3) 視差項展開（楕円距離展開）

次に時間変化するポテンシャルの内，距離に関する部分，$(c/d)^3$の展開について説明する。この視差項も角度と同じように離心率 $e$ の級数の形に展開される。計算は単純であり，(2)ででてきた各項に距離展開式をかけるだけである。言葉で書けば簡単な計算であるが，(2)の段階で既に半無限の個数の項が出現しており，それぞれに距離展開式の半無限の項を乗ずるのであるから，実際に計算を行うのは膨大な労力を要することになる。

ともあれ実際に計算を行い，係数（後で説明する）がある値より大きいものだけを拾い出せば，その係数より大きい分潮リストが完成する。係数の値を小さくしていけばこの分潮リストはいくらでも大きくなるのは今までの説明で容易に理解できるであろう。

(4) 基本分潮

上で説明した(3)までの段階を踏まないと完全な分潮リストはできないのであるが，実は(1)の段階で生じた項は(2)，(3)の展開をおこなってもそのままの形で生き残る（黄経 $x$ を平均黄経 $h$ に書き換えただけで）。つまり，(1)の段階で一部の分潮は既に求められていると考えた方がよい。そして，通常係数の大きな（つまり主要な）分潮がこれに当たる。それ故，次のように考えると分かり易い。まず，(1)の軌道面の展開により，主要な分潮が計算され，(2)，(3)の展開では，(1)で現れた主要分潮を親分潮として，親よりも小さな係数を持つ派生分潮が多数生じる。親分潮の係数が大きい場合は派生分潮にもそれなりに大きな係数を持つ分潮が現れ，最終分潮リストに生き残ることになる。分潮名で楕率潮等の名称が冠せられているものがこれに当たる。

以上の理由から，軌道面の傾きによる展開から生じる分潮を本稿では基本分潮と呼ぶことにする。既に4で説明したが，本稿ではここで言う基本分潮についての説明を与えることにし，(2)，(3)の具体的な展開法については別の機会に譲る。以降，6，7では太陽潮，太陰潮の具体的な展開を与えるが，その中で基本分潮の展開の段階では本来黄経 $x$ と表記されなければならないものを始めからその平均値である $h$（太陽の場合），$s$（太陰の場合）と表記してあるが，基本分潮はそのままの形で最後まで残る事を想定しているからである。

## 6．太陽潮の展開

この節では太陽潮の具体的な展開を与えることにする。潮汐の分潮としては月による太陰潮の方が重要であるが原理的な事を理解するにはより簡単な太陽潮の方が便利であるので先に太陽潮の展開を与えることにする。

6－1 座標系回転による $\cos\theta$ の算出

図6－1のような天球を想定する。

図の $\gamma$ は春分点であり，$\gamma$－S－Oの作る面は黄道面である。春分点の方角を $X$ 軸とし，$X-Y$ 面が赤道面になるように直交座標系 $XYZ$ をとる。また，春分点の方角を $X'$軸，$X'-Y'$面が黄道面になるよ

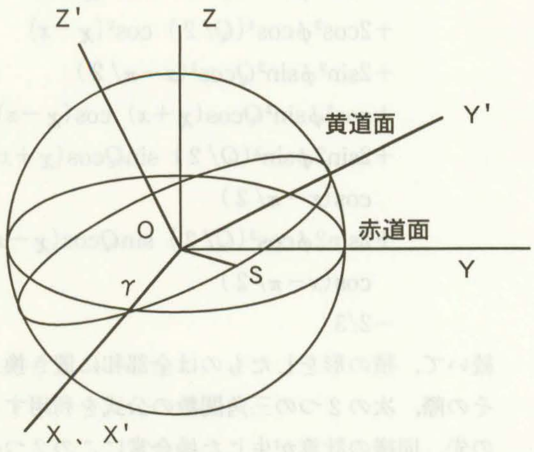


図６－１　黄道面と赤道面の座標回転

うに直交座標系 $X'Y'Z'$ をとる。黄道面と赤道面とのなす角度（軌道傾斜角）を $Q$ とする（図の∠Y'OY）。図のＳで表される点は太陽の位置を表し，黄道面上における太陽の春分点から測った角度（∠ＳＯγ）を $x$ とする。

① まず，太陽の位置を $X'Y'Z'$ 座標系で表すことにする。すると，太陽の位置を表す方向ベクトルは次のように表現できる。

$$(\cos x \quad \sin x \quad 0)$$

② このベクトルを赤道面が $x-y$ 軸となるような座標系でこの値を表わすと（図の $YZ$ 面で角度 $Q$ だけ回転させる），

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos Q & -\sin Q \\ 0 & \sin Q & \cos Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos Q \sin x \\ \sin Q \sin x \end{pmatrix}$$

この回転により，太陽の位置は地心直交座標系で表されたことになり，そしてその方向ベクトルは

$$(\cos x \quad \cos Q \sin x \quad \sin Q \sin x) \cdots \ (6-1)$$

となる。

潮汐ポテンシャルを計算しようとする地球上の１点をＰとして，その緯度と赤経を（$\phi$，$\chi$）とすると，この点Ｐの赤道直交座標系に於ける座標値は

$$(\cos\phi\cos\chi \quad \cos\phi\sin\chi \quad \sin\phi)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (6-2)$$

と表せる。これは４の簡単な展開とまったく同じであるので特に図を用いての説明はしない。

よって，$\cos\theta$ は両方のベクトルの内積になるので，（６－１）と（６－２）の内積をとり，次のようになる。

$$\begin{aligned} \cos\theta &= {}^t\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\chi \\ \cos\phi\sin\chi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos Q\sin x \\ \sin Q \sin x \end{pmatrix} \\ &= \cos\phi\cos\chi\cos x \\ &\quad +\cos\phi\sin\chi\cos Q\sin x \\ &\quad +\sin\phi\sin Q\sin x \end{aligned}$$

次に，この式をを $\chi$ と $x$ に着目して，三角関数の１次式の和で表わす。また，全てを cos 関数で表す。

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\phi\cos\chi\cos x + \\ &\quad \cos\phi\sin\chi\cos Q\sin x + \sin\phi\sin Q\sin x \\ &= \cos\phi\cos\chi\cos x \\ &\quad +\cos\phi\cos Q\cos(\chi-\pi/2) \\ &\quad \times\cos(x-\pi/2) \\ &\quad +\sin\phi\sin Q\cos(x-\pi/2) \\ &= (1/2)\cos\phi\ \{\cos(\chi+x) \\ &\quad +\cos(\chi-x)\} \\ &\quad +(1/2)\ \cos\phi\cos Q\ \{-\cos(\chi+x) \\ &\quad +\cos(\chi-x)\} \\ &\quad +\sin\phi\sin Q\cos(x-\pi/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= (1/2)\ \cos\phi\ (1-\cos Q) \\ &\quad \cos(\chi+x) \\ &\quad +(1/2)\ \cos\phi\ (1+\cos Q) \\ &\quad \cos(\chi-x) \\ &\quad +\sin\phi\sin Q\cos(x-\pi/2) \\ &= \cos\phi\sin^2(Q/2)\ \cos(\chi+x) \\ &\quad +\cos\phi\cos^2(Q/2)\ \cos(\chi-x) \\ &\quad +\sin\phi\sin Q\cos(x-\pi/2) \cdots\ (6-3) \end{aligned}$$

### ６－２　係数の計算

分潮の大きさの比較を行うために，係数の計算を行うことになるが，ここでその計算方法について説明しておく。これは Doodson の与えた係数の計算方法と一致しており，海洋潮汐の係数の計算方法として通常採用されている方法である。（６－３）式は３

つの cos 関数の和になっているが，それぞれに掛かる係数のうち，地球上の観測点の緯度 $\phi$ に関する項 ($\cos\phi$ や $\sin\phi$) を除いてそれ以外の部分の大きさを計算する。$Q$ は定数であるため

第１項：$\sin^2 (Q/2)=0.04126$

第２項：$\cos^2 (Q/2)=0.9587$

第３項：$\sin Q=0.3978$

となり，第２項が一番大きく，次が第３項，一番小さいのが第１項であることが分かる。

これ以降，分潮の係数を計算する場合は常にこの方法をとる。即ち，地球の観測点の緯度 $\phi$ の入った項を除いて，それ以外の部分の係数の大きさを持って分潮の係数とすることになる。言い換えれば，$\sin\phi$，$\cos\phi$ 等が最大値１をとる場合を想定して係数を計算することになる。ここで注意しておかなければならないことは，$\phi$ に関する部分が異なる場合は係数の比較だけでは直接分潮の大きさの比較にはならないことになることである。後ででてくるが，半日周潮と日周潮では $\phi$ に関する部分の形が異なるため，係数だけでは直接その重要性の比較はできず緯度も考慮する必要がある。

6－3　ポテンシャル値への代入

次に６－１で計算した $\cos\theta$ を式（２－４）の角度成分 $2\cos^2\theta-2/3$ に代入する。

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2\theta-2/3\\
&= 2\cos^2\phi\sin^4(Q/2)\cos^2(\chi+x)\\
&\quad+2\cos^2\phi\cos^4(Q/2)\cos^2(\chi-x)\\
&\quad+2\sin^2\phi\sin^2Q\cos^2(x-\pi/2)\\
&\quad+4\cos\phi\sin^2(Q/2)\cos\phi\cos^2(Q/2)\\
&\quad\cos(\chi+x)\cos(\chi-x)\\
&\quad+4\cos\phi\sin^2(Q/2)\sin\phi\sin Q\\
&\quad\cos(\chi+x)\cos(x-\pi/2)\\
&\quad+4\cos\phi\cos^2(Q/2)\sin\phi\sin Q\\
&\quad\cos(x-\pi/2)\\
&\quad-2/3
\end{aligned}
$$

が得られるが，まず，$\chi$ と $x$ を引数に含む三角関数は全部 cos 関数に書き換える。実行すると

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2\theta-2/3\\
&= 2\cos^2\phi\sin^4(Q/2)\cos^2(\chi+x)\\
&\quad+2\cos^2\phi\cos^4(Q/2)\cos^2(\chi-x)\\
&\quad+2\sin^2\phi\sin^2Q\cos^2(x-\pi/2)\\
&\quad+\cos^2\phi\sin^2Q\cos(\chi+x)\cos(\chi-x)\\
&\quad+2\sin2\phi\sin^2(Q/2)\sin Q\cos(\chi+x)\\
&\quad\cos(x-\pi/2)\\
&\quad+2\sin2\phi\cos^2(Q/2)\sin Q\cos(\chi-x)\\
&\quad\cos(x-\pi/2)\\
&\quad-2/3
\end{aligned}
$$

続いて，積の形をしたものは全部和に置き換える。その際，次の２つの三角関数の公式を利用する。この先，同様の計算が生じた場合常にこの２つの公式を多用することになる。

$$\cos^2A=(1/2)(1+\cos2A)$$

$$\cos A\cos B=(1/2)\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$$

実行すると，

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2\theta-2/3\\
&= \cos^2\phi\sin^4(Q/2)\{1+\cos2(\chi+x)\}\\
&\quad+\cos^2\phi\cos^4(Q/2)\{1+\cos2(\chi-x)\}\\
&\quad+\sin^2\phi\sin^2Q\{1+\cos(2x-\pi)\}\\
&\quad+(1/2)\cos^2\phi\sin^2Q\{\cos(2\chi)\\
&\quad+\cos(2x)\}\\
&\quad+\sin2\phi\sin^2(Q/2)\sin Q\{\cos(\chi+2x\\
&\quad-\pi/2)+\cos(\chi+\pi/2)\}\\
&\quad+\sin2\phi\cos^2(Q/2)\sin Q\{\cos(\chi\\
&\quad-2x+\pi/2)+\cos(\chi-\pi/2)\}\\
&\quad-2/3
\end{aligned}
$$

次に引数の同じものはまとめて書くと ($\cos(\chi+\pi/2)=-\cos(\chi-\pi/2)$ を利用する)，

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2\theta-2/3\\
&= \cos^2\phi\sin^4(Q/2)\cos(2\chi+2x)\\
&\quad+\cos^2\phi\cos^4(Q/2)\cos(2\chi-2x)\\
&\quad+(1/2)\cos^2\phi\sin^2Q\cos(2\chi)\\
&\quad+\sin2\phi\sin^2(Q/2)\sin Q\cos(\chi+2x\\
&\quad\pi/2)\\
&\quad+\sin2\phi\cos^2(Q/2)\sin Q\cos(\chi-2x\\
&\quad+\pi/2)
\end{aligned}
$$

$$+\{\sin 2\phi\cos^2(Q/2)-\sin 2\phi\sin^2$$
$$\times(Q/2)\}\sin Q\cos(\chi-\pi/2)$$
$$+\sin^2\phi\sin^2 Q\cos(2x-\pi)$$
$$+(1/2)\cos^2\phi\sin^2 Q\cos(2x)$$
$$+\cos^2\phi\sin^4(Q/2)+\cos^2\phi\cos^4(Q/2)$$
$$+\sin^2\phi\sin^2 Q$$
$$-2/3$$

次に，この式を，$\chi$ にかかる係数で，半日周潮，日周潮，長周期潮の３つに分類して整理する。まったく時間変化をしない定数項も現れるが，これは潮汐分潮とは関係ないので省略することにする。表記法としては，全部が和の形になっているので，プラス記号は省略した形で表記することにする。また，緯度に関する部分は共通因数として最初にくくりだす。

各分潮の後には，係数の大きさと分潮名を表現する記号も示してある。係数の大きさには２種類のものをあげてある。最初のものは係数の大きさをそのまま計算したものであり，２つめはそれに0.46をかけたものである。これは後で計算する太陰潮と比較するためであり，太陽潮が太陰潮に比べて0.46倍小さい事を考慮したものである。通常分潮の大きさを比較する場合は太陰潮も太陽潮も同時に扱うので後の方の係数が通常用いられる係数である。

分潮名についても注意が必要であろう。この段階では展開は終了しておらず途中段階なので，各項は最終的な分潮とは考えられない。しかしながら，この後の展開（楕円角度展開，視差項展開）では，でてくる項は全てこの基本分潮の派生分潮と考えて差し支えないので，これを基本分潮として理解することにして，同じ名前を使用する。

半日周潮（$2\chi$ を含むもの）

$\cos^2\phi\times$

$\sin^4(Q/2)\cos(2\chi+2x)$：　0.001703　0.000784

$\cos^4(Q/2)\cos(2\chi-2x)$：　0.9192　0.4228　S2

$(1/2)\sin^2 Q\cos(2\chi)$：　0.0791　0.0364　K2

日周潮（$\chi$ を含むもの）

$\sin 2\phi\times$

$(1/2)\sin 2Q\cos(\chi-\pi/2)$：0.3650　0.1679　K1

$\cos^2(Q/2)\sin Q\cos(\chi-2x+\pi/2)$：　0.3895　0.17917　P1

$\sin^2(Q/2)\sin Q\cos(\chi+2x-\pi/2)$：　0.01641　0.00755　$\phi$1

長周期潮（$x$ を含むもの）

$((3/2)\cos^2\phi-1)\sin^2 Q\cos(2x)$：　0.1582　0.070277　S sa

各分潮の係数について再度吟味をしておく。半日周潮の係数は共通因数 $\cos^2\phi=1$ とおいた場合に相当する。$\phi$ は緯度であるから解としては $\phi=0$ 即ち赤道上を仮定したことになる。日周潮の場合は $\sin 2\phi=1$ の場合に相当し，$\phi=\pm45°$ を仮定したことになる。

長周期潮の係数については多少こみいった説明が必要である。長周期潮の場合は緯度に関連した項としてくくり出すべきものは形を見ただけでは必ずしも自明ではない。潮汐学の他の教科書の係数計算法ではDoodsonの値を採用しているので，ここではその係数計算法と合わせたやり方をとることにする。Doodsonは（４－３）式から出発して展開を行っている。（４－３）式の中の長周期潮は

$$3\{(1/3)-\sin^2\phi\}\{(1/3)-\sin^2\delta\}$$

であるが，この式を少し書き換えて

$$3\{(1/3)-\sin^2\phi\}\{(1/3)-\sin^2\delta\}$$
$$=(3/2)\{(1/3)-\sin^2\phi\}\{(2/3)-2\sin^2\delta\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6-4)$$

Doodsonは（６－４）式の右側の項の係数を求めているので，これは，

$$(3/2)\{(1/3)-\sin^2\phi\}=1\quad(6-5)$$

とおいて係数を計算したことに相当する。これをとくと，$\sin^2\phi=-1/3$ となる。実際問題として，このようになる緯度帯は地球上に存在しないので，計算された係数は実際よりも大きく見積もっていること

になる。(6－4) 式の左辺は $\sin^2\phi=0$ で最大値 1/2をとる。つまり，赤道上を仮定した場合の2倍の係数を計算していることになる。

また,(6－4)式は $\phi=20°$ で符号を変えることに注意を喚起しておく。つまり，その緯度帯を挟んで両側では位相が逆転する。Doodson の与えた符号は赤道付近を基準にしており，中緯度帯より両極側では引数の与え方はその分潮が最低値をとる場合を基準にしていることになる。

6－4　太陽潮の基本分潮

基本分潮の性質について多少の説明を加えておく。まず，半日周潮には一つ主力となる大きな分潮が存在する。即ちS2分潮である。それ故，主太陽半日周潮の名称が与えられている。これに対して，日周潮では同程度の大きさの2つの分潮が存在している。即ちK1分潮とP1分潮である。このうち，P1分潮に主太陽日周潮の名称が与えられている。この理由はP1潮の方がK1潮より僅かに大きいからではなく，後にでてくる太陰潮の展開でもまったく同じ引数を持つK1潮が現れ，その2つが合成されてしまうためである。名称としては日月合成日周潮の名前が与えられている。ここでK1潮の引数には $x$ が入っていないことに注意をしてほしい。これはもともと入っていなかったわけではなく，計算の途中で落ちてしまったものである。$x$ が入っていないと言うことは，この分潮は太陽の黄経には関係なく地球の自転による角度 $\chi$ だけに依存することを意味する。勿論，$x$ の入っている分潮は太陽に特有のものであり，太陰潮の展開から同じものがでてくることはあり得ない。あまり大きくない分潮であるが，K2分潮にも $x$ が入っていない。この分潮も太陰から同じものがでてくる。それ故，日月合成半日周潮の名称が与えられている。

## 7．太陰潮の展開

7－1　$\cos\theta$ の書き換え

まず，白道面が $XY$ 面となる座標系（図の $X'''Y'''Z'''$ 系）で太陰の位置を表す。月の昇交点の方向に $X'''$ 軸をとる。白道面上に $Y'''$ 軸，白道面と直交する方向に $Z'''$ 軸となる直交座標系をとる。白道が黄道と交わる点（昇交点，図のP）から月の位置までの経度を $\sigma$（∠POM）とするとこの座標系での月の位置は

$$(\cos\sigma \quad \sin\sigma \quad 0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7-1)$$

と表せる。

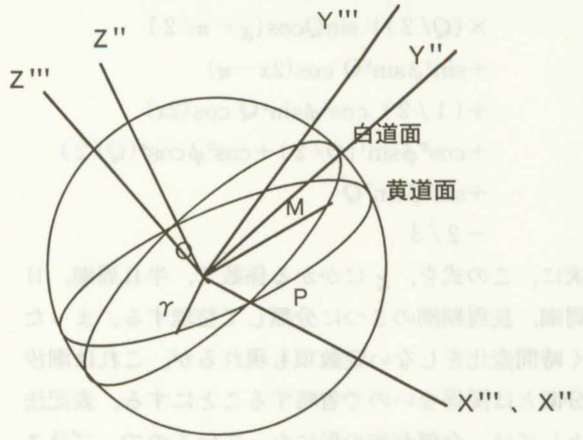


図7－1　白道面座標系から黄道面座標系への変換

次に，これを黄道座標系に変換する。$X'''$ 軸と同じ方向に $X''$ 軸をとり，黄道面内に $Y''$ 軸，黄道面と直交する方向に $Z''$ 軸をとる。(7－1) 式のベクトルを黄道座標系（$X''Y''Z''$ 系）で表すが，これは白道面の黄道に対する傾斜角を $I$ として $Y''Z''$ 面での角度 $I$ の回転を行えばよい。回転行列を乗じて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\sigma \\ \sin\sigma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sigma \\ \cos I \sin\sigma \\ \sin I \sin\sigma \end{pmatrix}$$

が得られる。つまり，太陰の位置は黄道座標系において次のベクトルで表される。

$$(\cos\sigma \quad \cos I\sin\sigma \quad \sin I\sin\sigma) \cdots (7-2)$$

次に $X$ 軸が春分点の方角になるような座標系（図7－2の $X'Y'Z'$ 系）で太陰の位置を表す。これは黄道面内で∠PO$\gamma$（$=N$，昇交点黄経）だけ回転することによって得られる。実行すると

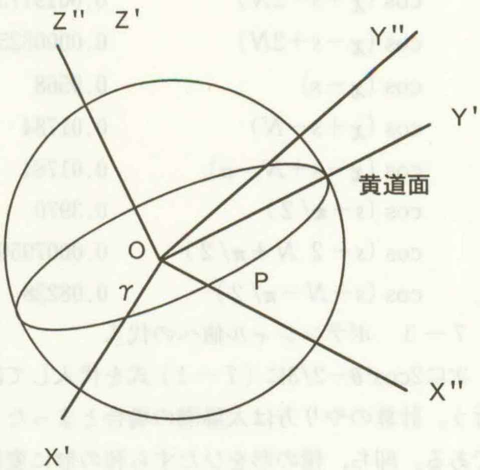


図7－2　黄道面内のNだけの回転

$$\begin{pmatrix}\cos N & -\sin N & 0\\ \sin N & \cos N & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\sigma\\ \cos I\sin\sigma\\ \sin I\sin\sigma\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos N\cos\sigma-\sin N\cos I\sin\sigma\\ \sin N\cos\sigma+\cos N\cos I\sin\sigma\\ \sin I\sin\sigma\end{pmatrix}$$

……………………………………（7－3）

が得られる。

最後にこのベクトルを赤道直交座標系に変換するが，これは太陽潮のときに行った変換とまったく同じであるので図による説明はおこなわない。計算を実行すると

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos Q & -\sin Q\\ 0 & \sin Q & \cos Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos N\cos\sigma-\sin N\cos I\sin\sigma\\ \sin N\cos\sigma+\cos N\cos I\sin\sigma\\ \cos Q\quad \sin I\sin\sigma\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos N\cos\sigma-\sin N\cos I\sin\sigma\\ \cos Q\ (\sin N\cos\sigma+\cos N\cos I\sin\sigma)\\ -\sin Q\sin I\sin\sigma\\ \sin Q\ (\sin N\cos\sigma+\cos N\cos I\sin\sigma)\\ +\cos Q\sin I\sin\sigma\end{pmatrix}$$

というベクトルが得られる。

地球上の観測点の位置ベクトルは太陽潮の場合と同じく，

$$(\cos\phi\cos\chi\quad \cos\phi\sin\chi\quad \sin\phi)$$

で表されるので，$\cos\theta$は両者の内積をとることによって得られる。

$$\begin{aligned}\cos\theta=&(\cos N\cos\sigma-\sin N\cos I\sin\sigma)\\ &\times\cos\phi\cos\chi\\ &+\{\cos Q\ (\sin N\cos\sigma+\cos N\cos I\\ &\times\sin\sigma)-\sin Q\sin I\sin\sigma\}\\ &\times\cos\phi\sin\chi\\ &+\{\sin Q\ (\sin N\cos\sigma+\cos N\cos I\\ &\times\sin\sigma)+\cos Q\sin I\sin\sigma\}\ \sin\phi\end{aligned}$$

（　）を全てはずして

$$\begin{aligned}\cos\theta=&\cos N\cos\sigma\cos\phi\cos\chi\\ &-\sin N\cos I\sin\sigma\cos\phi\cos\chi\\ &+\cos Q\sin N\cos\sigma\cos\phi\sin\chi\\ &+\cos Q\cos N\cos I\sin\sigma\cos\phi\sin\chi\\ &-\sin Q\sin I\sin\sigma\cos\phi\sin\chi\\ &+\sin Q\sin N\cos\sigma\sin\phi\\ &+\sin Q\cos N\cos I\sin\sigma\sin\phi\\ &+\cos Q\sin I\sin\sigma\sin\phi\end{aligned}$$

が得られる。この式を次の方針で書き換える。引数$\chi$，$\sigma$，Nの入った三角関数については全てcos関数に書き換える。さらに積の形をしたものは全て三角関数の積を和に変換する公式を用いて最終的に和の形に書き換える。計算は少々面倒であるが，実行した結果は次のようになる。

$$\begin{aligned}\cos\theta=&(1/4)\cos\phi\ (1+\cos I)\ (1\\ &-\cos Q)\ \cos(\chi+\sigma+N)\\ &+(1/4)\ \cos\phi\ (1-\cos I)\ (1\\ &+\cos Q)\ \cos(\chi+\sigma-N)\\ &+(1/4)\cos\phi\ (1-\cos I)\ (1\\ &-\cos Q)\ \cos(\chi-\sigma+N)\\ &+(1/4)\ \cos\phi\ (1+\cos I)\ (1\\ &+\cos Q)\ \cos(\chi-\sigma-N)\\ &+(1/2)\cos\phi\sin I\sin Q\cos(\chi\\ &+\sigma)\\ &-(1/2)\ \cos\phi\sin I\sin Q\cos(\chi\\ &-\sigma)\\ &+(1/2)\sin\phi\sin Q\ (1+\cos I)\\ &\times\cos(\sigma+N-\pi/2)\end{aligned}$$

$+(1/2)\sin\phi\sin Q\,(1-\cos I)$
$\times\cos(\sigma-N+\pi/2)$
$+\sin\phi\sin I\cos Q\cos(\sigma-\pi/2)$

$\sigma=s-N$ とおき，かつマイナス符号を持つものをプラスに書き換えて

$$
\begin{aligned}
\cos\theta =\ & (1/4)\cos\phi\,(1+\cos I)\,(1-\cos Q)\,\cos(\chi+s)\\
& +(1/4)\cos\phi\,(1-\cos I)\,(1+\cos Q)\,\cos(\chi+s-2N)\\
& +(1/4)\cos\phi\,(1-\cos I)\,(1-\cos Q)\,\cos(\chi-s+2N)\\
& +(1/4)\cos\phi\,(1+\cos I)\,(1+\cos Q)\,\cos(\chi-s)\\
& +(1/2)\cos\phi\sin I\sin Q\cos\,(\chi+s-N)\\
& +(1/2)\cos\phi\sin I\sin Q\cos\,(\chi-s+N-\pi)\\
& +(1/2)\sin\phi\sin Q\,(1+\cos I)\times\cos(s-\pi/2)\\
& +(1/2)\sin\phi\sin Q\,(1-\cos I)\times\cos(s-2N+\pi/2)\\
& +\sin\phi\sin I\cos Q\cos(s-N-\pi/2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (7-1)
\end{aligned}
$$

太陽潮の場合は $\cos\theta$ は３つの項で表現できたが，太陰の場合は軌道が複雑なため，９つの項が生じている。

7－2　係数の計算

太陽潮の場合と同様にここで各項の係数を与えておく。計算のやり方は太陽潮と同じで各項の係数の中から $\cos\phi$，$\sin\phi$ 等を除いた部分の値の大きさである。計算するに当たっては次の数値を利用する。

$\cos I=0.9960\quad 1-\cos I=0.0040$
$\cos Q=0.9175\quad 1-\cos Q=0.0825$
$\sin I=0.08968\quad \sin Q=0.3978$

下の表は左側が主要部分である余弦関数，その右は各係数である。一番右にはくくり出してある緯度関数の形を与えてある。

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(\chi+s)$ | 0.04117 | $\cos\phi$ |
| $\cos(\chi+s-2N)$ | 0.0019175 | $\cos\phi$ |
| $\cos(\chi-s+2N)$ | 0.0000825 | $\cos\phi$ |
| $\cos(\chi-s)$ | 0.9568 | $\cos\phi$ |
| $\cos(\chi+s-N)$ | 0.01784 | $\cos\phi$ |
| $\cos(\chi-s+N-\pi)$ | 0.01784 | $\cos\phi$ |
| $\cos(s-\pi/2)$ | 0.3970 | $\sin\phi$ |
| $\cos(s-2N+\pi/2)$ | 0.0007956 | $\sin\phi$ |
| $\cos(s-N-\pi/2)$ | 0.08228 | $\sin\phi$ |

7－3　ポテンシャル値への代入

次に $2\cos^2\theta-2/3$ に（7－1）式を代入して計算を行う。計算のやり方は太陽潮の場合とまったく同じである。即ち，積の形をひたすら和の形に変換して行くだけである。しかしながら，計算量は太陽潮の場合と比較するとはるかに多い。$\cos\theta$ が９つの項からなっているので，まず，それぞれの２乗の項が生じる。これらの項からは一つづつ，合計９個の分潮が生じる。次に９個の項のお互いの積の形が合計36項生じ，これを和の形に変換するとそれぞれから２項ずつ，合計72個の分潮がでてくる。単純に考えて総計81個の分潮が太陰の基本分潮として生じてくることになる。計算の過程を全部示すことは紙面の無駄遣いなので結果だけを次に与える。表記法は太陽潮の場合と同じく共通の緯度関数をくくりだして，一行が一つの分潮を表すように整理してある。各分潮の係数をその右に表してある。

半日周潮（$2\chi$ を含むもの）

$\cos^2\phi\times$

| | |
|---|---|
| $\cos(2\chi-2s)$ | 0.9155 |
| $\cos(2\chi-2s+N-\pi)$ | 0.03414 |
| $\cos(2\chi-2s+2N)$ | 0.0003972 |
| $\cos(2\chi-2s+3N-\pi)$ | 0.000001472 |
| $\cos(2\chi-2s+4N)$ | 0.00000000681 |
| $\cos(2\chi-2N)$ | 0.001835 |
| $\cos(2\chi-N)$ | 0.03411 |
| $\cos(2\chi)$ | 0.07814 |
| $\cos(2\chi+N-\pi)$ | 0.001468 |
| $\cos(2\chi+2N)$ | 0.000006793 |
| $\cos(2\chi+2s-4N)$ | 0.000003677 |

| | |
|---|---|
| $\cos(2\chi+2s-3N)$ | 0.00003422 |
| $\cos(2\chi+2s-2N)$ | 0.0004762 |
| $\cos(2\chi+2s-N)$ | 0.001469 |
| $\cos(2\chi+2s)$ | 0.001695 |

---

日周潮（$\chi$ を含むもの）

$2\sin\phi\cos\phi\times$

| | |
|---|---|
| $\cos(\chi-2s+\pi/2)$ | 0.3798 |
| $\cos(\chi-2s+N+\pi/2)$ | 0.08581 |
| $\cos(\chi-2s+2N-\pi/2)$ | 0.002196 |
| $\cos(\chi-2s+3N+\pi/2)$ | 0.00001498 |
| $\cos(\chi-2s+4N-\pi/2)$ | 0.00000006564 |
| $\cos(\chi-2N+\pi/2)$ | 0.001523 |
| $\cos(\chi-N-\pi/2)$ | 0.07180 |
| $\cos(\chi-\pi/2)$ | 0.3605 |
| $\cos(\chi+N+\pi/2)$ | 0.01045 |
| $\cos(\chi+2N-\pi/2)$ | 0.00006550 |
| $\cos(\chi+2s-4N+\pi/2)$ | 0.000001526 |
| $\cos(\chi+2s-3N-\pi/2)$ | 0.0001436 |
| $\cos(\chi+2s-2N-\pi/2)$ | 0.002196 |
| $\cos(\chi+2s-N-\pi/2)$ | 0.01047 |
| $\cos(\chi+2s-\pi/2)$ | 0.01634 |

---

長周期潮（$s$ もしくは $N$ を含むもの）

$\sin^2\phi\times$

| | |
|---|---|
| $\cos(N)$ | 0.06520 |
| $\cos(2N-\pi)$ | 0.0006317 |
| $\cos(2s-4N+\pi)$ | 0.000000633 |
| $\cos(2s-3N)$ | 0.0001309 |
| $\cos(2s-2N-\pi)$ | 0.006138 |
| $\cos(2s-N-\pi)$ | 0.06533 |
| $\cos(2s-\pi)$ | 0.1576 |

$\cos^2\phi\times$

| | |
|---|---|
| $\cos(N-\pi)$ | 0.03560 |
| $\cos(2N)$ | 0.0002368 |
| $\cos(2s)$ | 0.07878 |
| $\cos(2s-4N)$ | 0.0000001582 |
| $\cos(2s-3N+\pi)$ | 0.00003275 |
| $\cos(2s-2N)$ | 0.001205 |
| $\cos(2s-N)$ | 0.03267 |

となる。しかしながら，長周期潮については更に吟味が必要である。太陽潮の場合に係数が他の教科書で与えられているものと一致させるためには，$\sin^2\phi=-1/3$と置くことが必要であった。三角関数の公式に従って$\cos^2\phi=4/3$が得られるので，この２つを使って長周期潮はもっとまとめることができる。最終的に次の形が得られる。

半日周潮（２ $\chi$ を含むもの）

$\cos^2\phi\times$

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(2\chi-2s)$ | 0.9155 | M2 |
| $\cos(2\chi-2s+N-\pi)$ | 0.03414 | M2 |
| $\cos(2\chi-2s+2N)$ | 0.0003972 | M2 |
| $\cos(2\chi-2s+3N-\pi)$ | 0.000001472 | M2 |
| $\cos(2\chi-2s+4N)$ | 0.00000000681 | M2 |
| $\cos(2\chi-2N)$ | 0.001835 | K2 |
| $\cos(2\chi-N)$ | 0.03411 | K2 |
| $\cos(2\chi)$ | 0.07814 | K2 |
| $\cos(2\chi+N-\pi)$ | 0.001468 | K2 |
| $\cos(2\chi+2N)$ | 0.000006793 | K2 |
| $\cos(2\chi+2s-4N)$ | 0.000003677 | |
| $\cos(2\chi+2s-3N)$ | 0.00003422 | |
| $\cos(2\chi+2s-2N)$ | 0.0004762 | |
| $\cos(2\chi+2s-N)$ | 0.001469 | |
| $\cos(2\chi+2s)$ | 0.001695 | |

---

日周潮（$\chi$ を含むもの）

$2\sin\phi\cos\phi\times$

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(\chi-2s+\pi/2)$ | 0.3798 | O1 |
| $\cos(\chi-2s+N+\pi/2)$ | 0.08581 | O1 |
| $\cos(\chi-2s+2N-\pi/2)$ | 0.002196 | O1 |
| $\cos(\chi-2s+3N+\pi/2)$ | 0.00001498 | O1 |
| $\cos(\chi-2s+4N-\pi/2)$ | 0.00000006564 | O1 |
| $\cos(\chi-2N+\pi/2)$ | 0.001523 | K1 |
| $\cos(\chi-N-\pi/2)$ | 0.07180 | K1 |

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(\chi-\pi/2)$ | 0.3605 | K1 |
| $\cos(\chi+N+\pi/2)$ | 0.01045 | K1 |
| $\cos(\chi+2N-\pi/2)$ | 0.00006550 | K1 |
| $\cos(\chi+2s-4N+\pi/2)$ | 0.000001526 | OO1 |
| $\cos(\chi+2s-3N-\pi/2)$ | 0.0001436 | OO1 |
| $\cos(\chi+2s-2N-\pi/2)$ | 0.002196 | OO1 |
| $\cos(\chi+2s-N-\pi/2)$ | 0.01047 | OO1 |
| $\cos(\chi+2s-\pi/2)$ | 0.01634 | OO1 |

長周期潮は

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(N-\pi)$ | 0.06920 | |
| $\cos(2N)$ | 0.0005263 | |
| $\cos(2s-4N)$ | 0.0000004219 | Mf |
| $\cos(2s-3N+\pi)$ | 0.00008730 | Mf |
| $\cos(2s-2N)$ | 0.003653 | Mf |
| $\cos(2s-N)$ | 0.06534 | Mf |
| $\cos(2s)$ | 0.1575 | Mf |

7－4　太陰潮における $fu$ 問題

7－3において白道面と赤道面の傾きから生ずる基本的な分潮について，その導出をおこなった。そして，その分潮名を一番右側に書いてある。これを見るとわかるように同じ名前が複数の分潮に付けられている。具体的に言えば，5つの分潮が同じ名前を持っている。同じ名前の付いた分潮はいずれも $\chi$ と $s$ に関する部分は同じ形を持っている。異なるのは $N$ に関する部分だけである。$N$ は18.6年で一巡りするため，例えば1年程度のデータを扱った場合はこれらの分潮は事実上区別がつかない。そのため，昔から海洋潮汐においてはこれらの分潮はまとめて一つのものとして扱われている。これらの分潮をまとめると，まとめた結果はもはや純粋の cos 関数とは言えず，係数と引数の中に $N$ によって不規則変化する（ゆっくりではあるが）部分の存在する分潮ができあがる。通常，変化する係数に $f$ という文字を用い，不規則変化する引数には $u$ という文字を用いる。この文字を使って，これを太陰潮汐の $fu$ 問題と称する（エフユー問題と発音する）。

Darwin が最初にポテンシャル展開を行った時は $N$ に関しては展開は行っておらず（その意味では不完全な展開であった），係数と引数の中に $N$ に関する部分は含んだままであった。$N$ に関しても展開を行いその後一つの分潮にまとめるやり方は Doodson が示した。本稿ではその完全なやり方を示すことにする。完全と言う意味は7－3の分潮を導く過程では近似式は用いておらず，$N$ に関しての展開は完全に終了しているという意味である。実際，ポテンシャル展開はこの後，楕円角度展開，視差項展開と進んで行くがそこででてくる項には $N$ は含んでおらず，新しい $N$ に関する項がでてくることはない。

複数の分潮の合成には次の三角関数の公式を用いる。

$$a\sin(x)+b\cos(x)=f\cos(x+u)$$

$$f^2=a^2+b^2,\qquad \tan u=-a/b$$

例として，M2潮の合成を行う。まず，引数に $N$ をふくむ項については $2\chi-2s$ だけを含むように書き換える。$\cos(2\chi-2s+N-\pi)$ について行ってみた結果を示すと

$$\begin{aligned}\cos(2\chi-2s+N-\pi)&=-\cos(2\chi-2s+N)\\&=-\cos N\cos(2\chi-2s)\\&\quad+\sin N\sin(2\chi-2s)\end{aligned}$$

残りの項についても同様の計算を行い，$\cos(2\chi-2s)$ と $\sin(2\chi-2s)$ の2つの項にまとめる。その際係数も考慮し，最大の係数0.9155でくくり出すと，cos 関数と sin 関数の係数が次のようにもとまる。

$$\begin{aligned}a&=1+c1\cos N+c2\cos 2N\\&\quad+c3\cos 3N+c4\cos 4N\\b&=c1\sin N+c2\sin 2N+c3\sin 3N\\&\quad+c4\sin 4N\end{aligned}\qquad(7-2)$$

$c1=-0.373$

$c2=0.0004339$

$c3=-0.0000016$

$c4=0.0000000074$

（7－2）式を使い，$f$ と $u$ はつぎの式から求め

られる。

$$f^2=a^2+b^2$$

$$u=\arctan\ (-a/b)$$

$f$ と $u$ には（7－2）式を使って展開形を与えることも可能であり，実際に計算すると他の教科書で与えられているものと同等のものが得られる。しかし，今後はこの種の計算は計算機を使うことになると思われ，このままでも十分であろう。

7－5　太陰潮の基本分潮の説明

太陰潮には太陽潮に比較してたくさんの分潮が計算されたが，$N$ に関する項をまとめてしまえば，実際には太陽よりも多いわけではなく，半日周潮，日周潮がそれぞれ3個，長周期潮は実質1個である。太陽潮と同じく，半日周潮には大きなものが一つ（M2），日周潮には同等の大きさのものが2つ（O1とK1）存在する。名称はM2が主太陰半日周潮，O1が主太陰半日周潮である。太陽潮の所で既に議論したが，K1潮には $s$ が含まれておらず，これは太陽から生ずるK1潮とまったく同一のものである。また，位相も一致している。そのため，この2つは加えられて単一分潮となる。日月合成日周潮の名称が与えられていることは太陽潮の所で既に述べた。

太陽潮の中で最も係数の大きいS2潮と，太陰潮の中から大きいものを2つ，M2，O1，および合成潮であるK1潮の4つを主要4分潮と言うことはよく知られている。係数の大きさで言えば，M2，S2，K1，O1の順番である。太陰潮だけで言えば，O1潮の方がK1潮より大きいが，K1潮には太陽も入っているので，K1潮の方がO1潮よりも大きくなる。

次の関係も知っておくと便利かもしれない。日周潮は同程度の大きさのものがペアで生じるので（太陽潮のP1とK1(太陽)，太陰潮のO1とK1(太陰))，係数だけの関係であるが，次の関係が大まかに成り立つ。

O1＋P1＝K1（太陰）＋K1（太陽）＝K1

## 8．引数の別表現

他の潮汐の教科書では恒星時 $\chi$ の代わりに平均太陽の時角 $T$ が使われている場合が多い。3－5で説明したように $\chi$ と $T$ の関係は次のようになる。

$$\chi=T+h \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8-1)$$

（8－1）式を使って引数を書き換えてみる。例えばM2潮を例に取れば，

$$\cos(2\chi-2s)=\cos(2T+2h-2s)$$

通常，潮汐学の教科書ではこの形の引数の表が与えられている。

## 引　用　文　献

Doodson, A. T.：Harmonic Tidal Constituents. Chpater Ⅶ. Admiralty Manual of Tides. 50-61. His Majesties Sationery Office. (1941)

中野猿人：第1章～第4章．潮汐學(復刻版)．生産技術センター．3-120．(1975)