中間線・限界線の計算方法

辰野忠夫　：　航法測地課

Computation of Median line and Limit line

Tadao Tatsuno : Geodesy and Geophysics Division

1. はじめに

国連海洋法条約では，領海・排他的経済水域の限界線，相対国との中間線等の表示が必要になる。限界線・中間線については，従来も計算方法が考えられているが，測地線の計算について，変分法のオイラー方程式から数値積分した方法についてはあまり述べられていないと思われる。

測地線の数値積分については，先の水路部研究報告第25号に報告したが，これの応用とし，また反転経路の積分についてより速く収束する方法が得られたのでここに述べることとした。

2. 測地線の計算

測地線の計算については，前述の報告に詳しく述べてあるが，概略と，反転経路の収束の速い積分法について記す。第1図に示すように，測地線は与件（p_1，p_2）により定まる最高緯度があり，これ以上になれない。これを頂点（p_x）と呼び，頂点に関し同じ側にある2点間の場合を単調経路と呼び，頂点をはさむ2点間の場合を反転経路と呼ぶことにする。

(1) 中点曲率半径による近似

2点間の距離を求めるべき点が第2図に示すように p_1，p_2 であり，それぞれの緯度が φ_1，φ_2 であるとする。中点の緯度を φ_m とし，p_1 から p_2 を望む方位角が α_1 のとき，平行圏曲率半径を $r_p(\varphi)$，卯酉線曲率半径を $N(\varphi)$ として，中点での方位角 α_m と垂直截線の曲率半径 ρ は次式により与えられる。

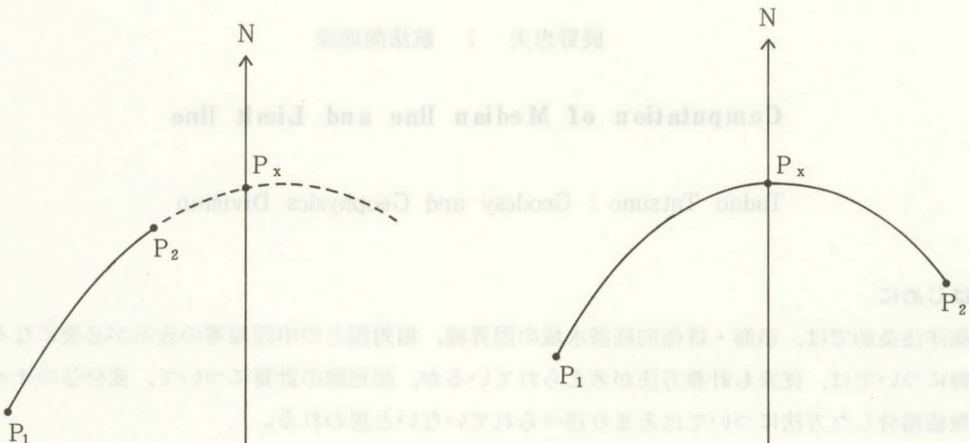
$$\sin\alpha_m = \sin\alpha_1 \, r_p(\varphi_1) / r_p(\varphi_m)$$

$$1/\rho = \cos^2\alpha_m / r_m(\varphi_m) + \sin^2\alpha_m / N(\varphi_m)$$

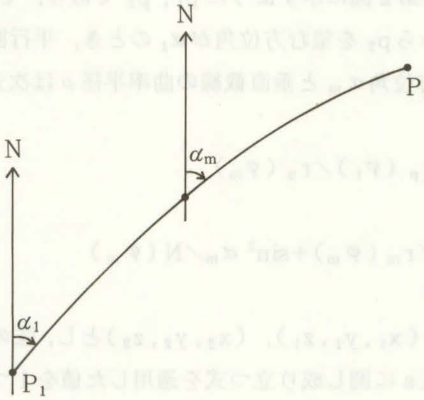
2点 p_1，p_2 の座標をそれぞれ（x_1, y_1, z_1），（x_2, y_2, z_2）とし，弦の長さを ℓ とするとき，第3図のように平面内にある円の弦 ℓ と円弧 s に関し成り立つ式を適用した値を1つの近似として用いることができる。

$$\ell = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

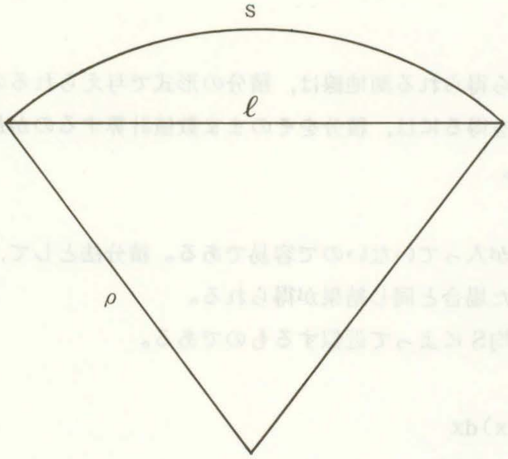
$$s = 2\rho\sin^{-1}(\ell/2\rho)$$



第１図　単調経路と反転経路



第２図　中点での方位角



第3図　弦と円弧の関係

この方法で得られる精度は，単調経路の場合130㎞で1㎜以上，530㎞で2㎜程度，1320㎞で6㎝程度となっている。

(2) 傾斜楕円による近似

回転楕円体上の2点と原点の作る平面が，回転楕円体と交わる曲線は楕円になる。この平面が赤道面となす角をiとし，回転楕円体の長半径をa，短半径をbとするときに，この傾斜した平面に生ずる楕円の長半径はaであり，短半径b′と離心率e′は次のようになる。

$$1/b'^2=\cos^2 i/a^2+\sin^2 i/b^2$$

$$e'^2=\sqrt{1-b'^2/a^2}$$

傾斜楕円上にある2点での法線角をψ_1，ψ_2とし，その平均をψ_mとすると，これに対応する曲率半径は次式により得られる。

$$\rho=\frac{a(1-e'^2)}{(1-e'^2\sin^2\psi_m)^{3/2}}$$

この曲率半径を先と同様に弦と円弧の関係式に代入することにより測地線長の1つの近似値が得られる。これは，530kmで1mm以上，1320kmで1.8cmの精度を有する。また，単調経路と反転経路の判別もでき，反転経路でも精度がよい。

(3) 数値積分法

変分法のオイラー方程式から得られる測地線は，積分の形式で与えられるので，中点曲率半径法も，傾斜楕円法も近似である。真の値を得るには，積分をそのまま数値計算するのが最もよい。数値計算は単調経路と反転経路にわけて説明する。

(1) 単調経路の場合

この場合，積分経路に頂点が入っていないので容易である。積分法として，ガウスの方法で分点が6個あれば十分によく，29分点用いた場合と同じ結果が得られる。

これは次の積分Iを荷重平均Sによって近似するものである。

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$$

$$S = \sum_{i} w_i f(x_i)$$

分点が6個の場合についての分点座標x_iと重みw_iの値は先述の報告に記載されている。

(2) 反転経路の場合

反転経路では中間に頂点が入っているので，積分は2個に分けて行わなければならない。また，頂点において分母がゼロになるので，ガウス法では収束が極めて遅くなる。このため，二重指数関数型数値積分公式を用いる。これは，有限区間（−1，+1）における次の積分Iについて，

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$$

$x = \pm 1$において，

$$(1-x)^p(1+x)^q, \qquad p, q > -1$$

程度の特異性があってもよいもので，今の場合にちょうどよいものである。

xに変換

$$x = g(t)$$

を行って，区間（−1，+1）を（−∞，+∞）に変換すると積分は

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

となる。これに台形則を用いれば，刻みをhとして

$$I = h\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(g(nh))g'(nh)$$

となる。変換 g(x)として，$|t|$ が大きくなるとき，二重指数関数的にゼロに近ずくものが最適であるとされている。これの例として，次のものがある。

$$x = \tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh(t)\right)$$

級数の和をnに関してとるとき，追加項が十分小さくなったところで打ち切る。また，上限緯度は頂点に近く，距離値が十分収束したところで打ち切る。頂点緯度そのものは，積分によって得られる経度差が与点間経度差に十分近くなるように調整して得られる測地線パラメータによって定まる。この変換を用いることにより，頂点で分母がゼロになる反転経路についても速い収束が得られる。収束を判定するとき収束の限界として，距離について0.005 m，経度について，0″.0003としてよい結果が出た。

この二重指数関数法の結果を中点曲率半径法および傾斜楕円法の距離値と比較すると，410㎞程度の距離の場合，二重指数関数法の距離値は中点曲率半径法の距離値と0.1～0.2㎜で，傾斜楕円法の距離値と0.3～0.4㎜程度で一致している。この結果例を第1表にしめす。楕円体はベッセルである。

以下に述べる限界線・中間線の点の計算に際し，これらの点から最も近い基点をさがす場合には計算時間も速く，経路の判定もできる傾斜楕円法を用い，距離値を計算する場合には確実な値の得られる数値積分法を用いている。

2. 中間線の計算

相対する2カ国（以下A国，B国と呼ぶ）の基点列が与えられ，中間線を計算するに当って，順序として，まず，最小距離値にある点Fを第1点とし，以下外挿と収束の方法によって求める。

基点列と中間線・限界線の配置は概ね第4図のようになっている。最小距離点FからA国，B国双方の200海里限界線の交差点C_1の方への計算を説明するが，交差点C_2の方も同様である。

(1) 初点の計算

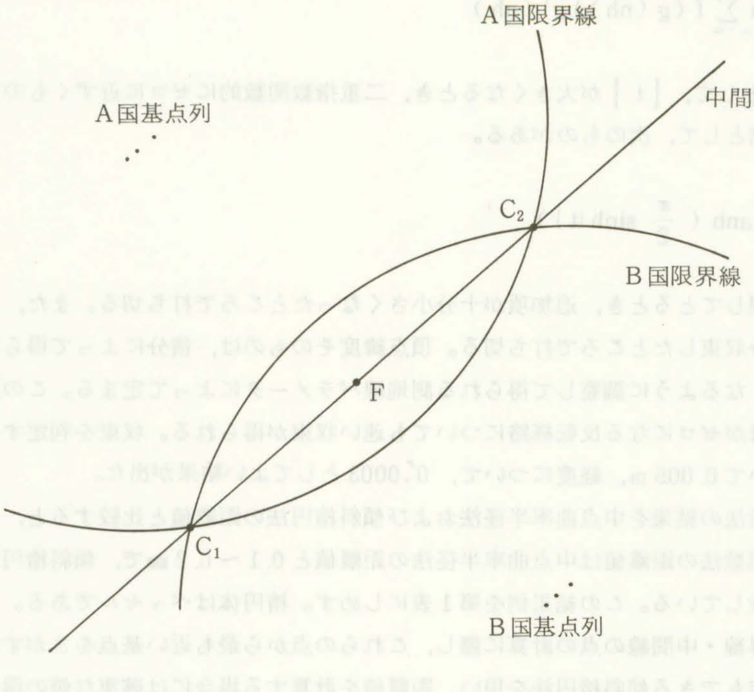
初点を求めるには，A国の基点と，B国の基点の全ての組み合わせについて，最小距離を与える対を捜し出して，この2点の中央に最小等距離点としてのF点を求める。

最小距離を与える対が求まったら，Fの第1近似として，平均率度，平均経度の点を求め，後述の座標修正法により近似度をあげて収束させる。基点の配置の状況によっては座標修正により最小距離の対が変化することも考えられるので，修正のたびに全基点のサーチを再度行うこととしている。

F点が決定されると，第2点の近似位置は，これに

第1表　距離計算値の比較
（ベッセル楕円体）

与件経緯度	
$\phi 1$	20° 32' 32".5
$\lambda 1$	144° 53' 24".4
$\phi 2$	20° 31' 28".713958
$\lambda 2$	140° 55' 36".389031
計算結果	
中点曲率半径法	413282.46139m
傾斜楕円法	413282.46155m
二重指数関数法	413282.46124m
頂点緯度	20° 32' 47".6255377



第4図　両国基点列と線群

用いたA国基点とB国基点を結ぶ線に直交する線上にある。入力で与えるステップ量だけ離れた位置に第2点を求める。

(2)　第2点以降の計算

第2点以降は，外挿により近似点を求め，逐次近似により位置を修正して精密にする。この外挿の方向は，第2点のときは2基点を結ぶ線に直交する方向とし，第3点以降は以前の2点からの延長とする。外挿距離はステップ量とし入力で与える。

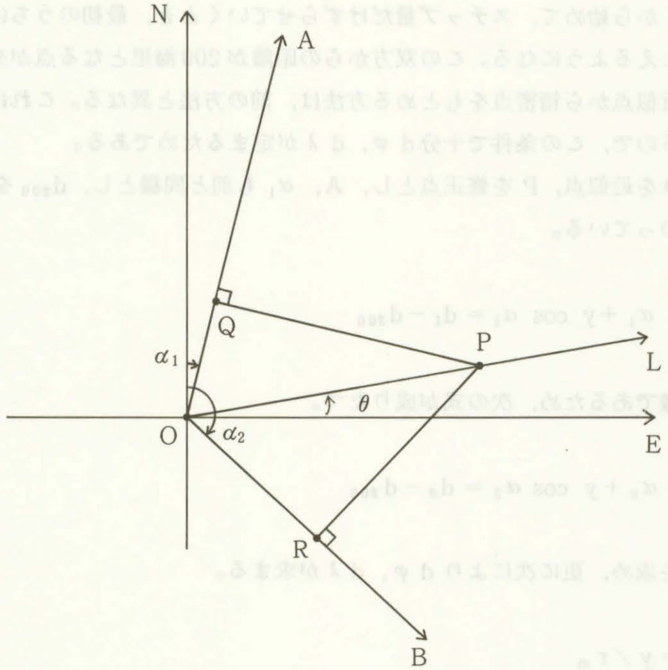
中間線が単調な場合には，収束する点はこの前2点の延長線上に近いが，両国基点列の配置の状況によっては，急に方向が変化することがあるので，これに対応しなければならない。これへの対応は，数回反復しても収束しないときは，方向の急変と解して，延長線に直交する方向に近似点をもうけて位置修正の計算を行うこととしている。

この前2点の延長上に一定のステップ量だけ前進させて，次の点の近似点を求める方法は，通常行われる緯度だけ，または経度だけのステップ量を与える方法より有利である。緯度だけ，または経度だけのステップの場合，中間線が子午線または緯度線に平行近くなると，点間距離が大きくなりすぎたり，収束しないことが発生する。延長上の近似点の場合は，これがなく，変化に対し滑らかに追随し，ほぼ等間隔の分布で結果が得られる。

(3) 位置修正法

近似点から精密な点をもとめるための位置修正法は次のようにする。中間線は点が連続して存在しているので，そのうちの1点を求めるには，何かの条件によって限定しなければならない。この限定する条件を位置の線によることとする。

前述のように，近似点は前2点の延長につくられる。この延長線にほぼ平行して無限に中間点が存在するから，限定する条件として，これに直交する線をとるのが最適である。第5図において，原点Oを近似点，E，N，Lの方向をそれぞれ東方，北方，位置の線の方向とする。最小距離を与えるA国，B国の基点の方向をA，Bとし，方位角と距離をα_1，α_2，d_1，d_2とする。



第5図　中間点の位置修正

距離d_1，d_2が等しくないためO点が中間点となっていない。位置の線OL上でP点が修正された点とし，OA，OBへの垂線をQ，Rとすると，距離OLを$d\ell$で表して次の式が得られる。

$$d_1 - d\ell \sin(\alpha_1 + \theta) = d_2 - d\ell \sin(\alpha_2 + \theta)$$

$$d\ell = (d_1 - d_2) / (\sin(\alpha_1 + \theta) - \sin(\alpha_2 + \theta))$$

子午線曲率半径，平行圏曲率半径をそれぞれ，r_m，r_pとし，緯度，経度の修正量をdφ，dλとすると，次のように得られる。

$$d\varphi = d\ell / r_m$$

$$d\lambda = d\ell / r_p$$

位置をdφ，dλで修正した場合，最小距離を与える基点の対が変っていることもありうるので，そのつど最小距離の基点対はとりなおして反復するようにしてある。

(4) 交差点の修正

第4図で示す初点Fから始めて，ステップ量だけずらせていくとき，最初のうちは200海里以内にあるが，そのうち200海里をこえるようになる。この双方からの距離が200海里となる点が交差点である。

この点について，近似点から精密点をもとめる方法は，前の方法と異なる。これは，双方から等距離にあるという2条件があるので，この条件で十分dφ，dλが定まるためである。

第6図において，Oを近似点，Pを修正点とし，A，α_1も前と同様とし，d_{200}を200海里とすると，修正点は次の直線上にのっている。

$$x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1 = d_1 - d_{200}$$

B国についても同様であるため，次の式が成りたつ。

$$x \sin \alpha_2 + y \cos \alpha_2 = d_2 - d_{200}$$

これより，x，yを求め，更に次によりdφ，dλが求まる。

$$d\varphi = y / r_m$$

$$d\lambda = x / r_p$$

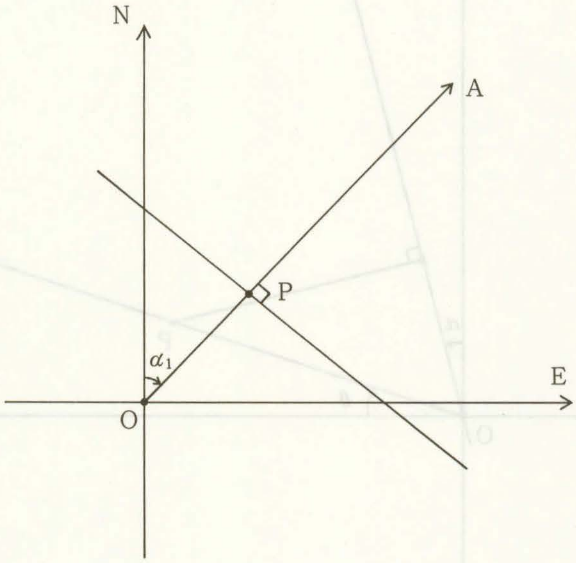
これによって計算を反復して，収束させ，精密点をもとめる。

4. 限界線の計算

第4図に示されるように，限界線は4本計算される。すなわち，交差点がC_1，C_2の2点あり，国がA，Bとあるので，C_1点から出るA国，B国の線，C_2から出るA国，B国の線となる。

この場合，初点はC_1，C_2として既に求まっている。第2点以降の計算はステップ量だけ延長することにより近似点をつくり，逐次近似により精密化する点では他と同様である。

第7図により位置修正法を述べる。限界線上の点は無限にあるので，中間線の場合と同様に，近似点の近くで位置の線を定め，この上にのる点を求めることとする。位置の線としては，延長線に直交する線が適し



第6図　交差点の位置修正

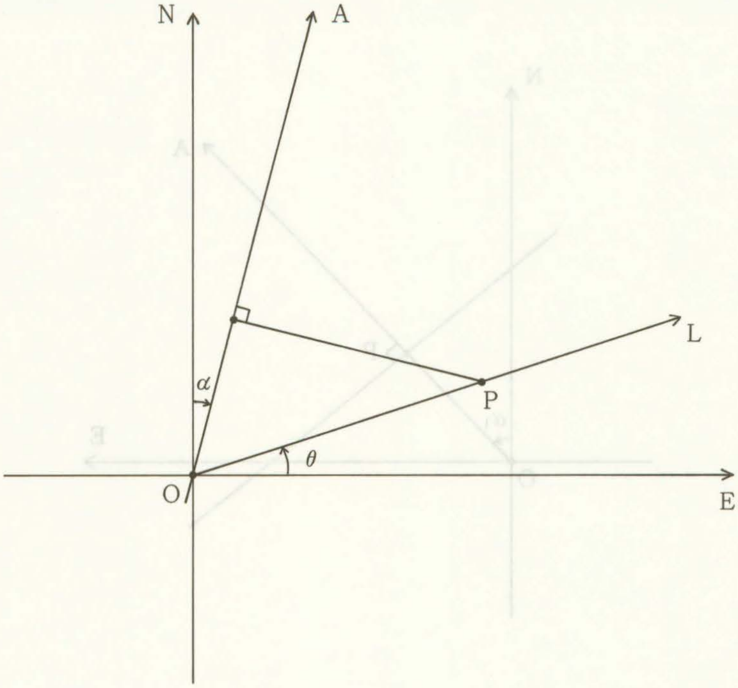
ている。これをOLとする。図のように角α，θを定め，A国基点への距離をd_1とすると，200海里となる点は，OPを$d\ell$，修正量を$d\varphi$，$d\lambda$として，

$$d\ell \sin(\alpha+\theta) = d_1 - d_{200}$$

$$d\varphi = d\ell \sin\theta / r_m$$

$$d\lambda = d\ell \cos\theta / r_p$$

により求められる。



第７図　限界点の位置修正

5. おわりに

以上で，２カ国が相対する場合，中間線が滑らかに続く場合も，急な方向変化を伴う場合も終了した。また，測地線が，単調経路の場合も反転経路の場合も数値積分が可能である。

プログラミングと計算は，ワークステーション hp 9000 － 300によって行った。これに関し，衛星測地室の職員から助言を得た。ここに記して謝意を表します。

参考文献

1. 辰野忠夫：積分法による測地計算．水路部研究報告　25. p 165 － 179（1989）
2. 森正　武：曲線と曲面．新しい応用の数学５．教育出版．p 21 － 27（1989）